Capítulo 6

Matrizes e suas formas especiais

Neste capítulo iremos estudar alguns assuntos que povoaram os capítulos anteriores de maneira informal, as propriedades das matrizes.
Começaremos do começo porque este capítulo será usado como referência pelos capítulos anteriores e sua leitura poderá ser feita de forma simultânea com o resto do livro.
Um sistema de equações pode ser escrito em forma mais simples, isto implica em alterarmos a matriz do sistema de equações para obter outra em uma forma forma tal que não altere o significado das solução do sistema.
Há duas formas de "*equivalência*" entre matrizes e vamos discutí-las aqui:

- *semelhança de matrizes (sistemas lineares)*
- *equivalência de matrizes*

para serem *semelhantes* as matrizes têm de ser *equivalentes*, assim a *semelhança* é um caso especial da *equivalência*.

6.1 A semelhança de matrizes

Aqui consideraremos uma matriz como esquema de números que guarda as informações de um sistema de equações lineares, ou de uma função linear.
Os *métodos* para transformar uma matrizes em outra que lhe seja semelhante são as *operações-linha* ou as *operações-coluna*, veremos que isto não altera o significado do sistema de equações, mas certamente nos obriga a registrar as operações feitas para podermos retornar às condições do *sistema primitivo*.

Um sistema de equações pode ser escrito em forma mais simples como um produto matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \qquad (6.1)$$

e assim muitas das contas elementares que se podem fazer com equações do primeiro grau,

$$ax + b = c \ ; \ a, b, c, x \in \mathbf{R}$$

podem ser repetidas com os vetores e com as matrizes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \text{ x } m}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \tag{6.2}$$

As operações com as matrizes, sobre tudo as matrizes realmente grandes, como são necessárias para guardar dados, em informações do tipo

- análise econômica; O Departamento de Economia da Universidade do Missouri at St. Louis, rodava um programa de modelagem econômica numa estação RISC com dois processadores levando 12 meses para fazer a análise dos dados, em 2000, um agregado de 10 PCs rodando Linux conseguiu reduzir este tempo para 3 meses;

- previsão meteoreológica. A NASA tem um centro, Goddard Space Flight Center, dedicado à meterologia rodando, num Cray com 512 processadores um programa que coleta a nível mundial as informações metereológicas. Em 1999 este computador levada 6 horas para processar as informações recebidas e outras 6 horas para montar o sistema de cartas meteoreológicas, ver [11, 1999]. Você pode ler mais a respeito e inclusive obter informações bibliográficas no endereço eletrônico indicado na bibliografia.

Isto para citar apenas dois exemplos "grandes" em que se usam sistemas lineares, e que exigem um conhecimento mais *íntimo* com as propriedades das matrizes para que possamos encontrar atalhos que minimizem o tempo de cálculo. Nos casos acima é usada uma ferramenta computacional chamada *processamento paralelo* para a qual a Álgebra Linear tem uma contribuição significativa.

Em escala bem menor do que os dois exemplos acima, e mais próximo dos nossos meios, veja a diferença, no cálculo do determinante:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{6.3}$$

$$2! = 4 \text{ termos} \tag{6.4}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \tag{6.5}$$

$$a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

$$3! = 6 \text{ termos} \tag{6.7}$$

e podemos facilmente imaginar que o $\det(\mathcal{A})$, numa matriz $4 \text{ x } 4$, teria

$$4! = 24 \text{ termos},$$

o que é verdade.

Os cálculos envolvendo grandes matrizes tem uma quantidade muito grande de operações o que os fazem proibitivos, mesmo com grandes computadores, se não tivessemos atalhos adequados para contorná-los.

Mas já vimos que o escalonamento de matrizes é um desses atalhos que torna simples a solução de sistemas de equações substituindo as $n!$ operações necessárias ao cálculo de um determinante por

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} \approx n^2 < n!$$

operações necessárias para anular a metade dos termos de uma matriz e mais a resolução das n equações com um único coeficiente, uma progressão aritmética de coeficientes.

6.1.1 O projeto

Nosso primeiro objetivo, neste capítulo, é o de validar as operações que fizemos para escalonar matrizes, a *semelhança* entre matrizes. Depois vamos discutir de forma mais ampla a *equivalência* entre matrizes.

Definição 29 *Semelhança entre matrizes*

Duas matrizes se dizem semelhantes,

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$$

se e somente se os sistemas de equações lineares ,

$$\mathcal{A}x = b \ ; \mathcal{B}x' = b'$$

tem as mesmas soluções, a menos de um isoformismo, uma matriz inversível, não singular *que transforme*

$$(x, b) \Longrightarrow (x', b').$$

Mas, colocado nos termos acima existe uma seguinte dificuldade operacional, veja que podemos fazer operações à esquerda com as matrizes do sistema:

$$\mathcal{A}x = b \ \equiv \mathcal{M}\mathcal{A}x = \mathcal{M}b$$

porém não podemos alterar *facilmente* a matriz $\mathcal{A}$ com operações à direita. Uma saída para esta dificuldade vai ser elaborada em dos itens do *laboratório.* Esta *dificuldade* vai ser o gancho em que nos iremos apoiar para discutir uma forma mais aprofundada de *equivalência entre matrizes.*

6.1.2 Semelhança entre matrizes

Nas próximas sessões de *laboratório* vamos nos dedicar aos vários tipos de semelhança entre matrizes e sistemas lineares.

Laboratório 17 *Operações linha ou coluna com matrizes*

Use `scilab` *para executar as experiências aqui descritas. Onde abaixo estiver escrito* uma matriz qualquer*, despreze o* excesso de generalidade *dos autores e use matrizes* 3 x 3 *e procure se convencer que funciona para matrizes quaisquer...*

1. *Permutação de linhas ou colunas de uma matriz*

   (a) *Considere a matriz identidade e permute as suas duas primeiras linhas obtendo a matriz $\mathcal{U}$.*

   (b) *Verifique que o resultado será o mesmo se você permutar as duas primeiras colunas.*

   (c) *Permute agora tres linhas da matriz identidade obtendo assim a matriz $\mathcal{U}$ veja que o mesmo se da, relativamente as colunas, na matriz $\mathcal{U}^t$. Com* `scilab`

```
-->U
 U  =

!   0.    0.    1. !
!   1.    0.    0. !
!   0.    1.    0. !

-->U'
 ans  =

!   0.    1.    0. !
!   0.    0.    1. !
!   1.    0.    0. !
```

   (d) *Defina uma matriz $\mathcal{A}$ qualquer, por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, mas com a mesma dimensão da matriz identidade que você tiver escolhido. Efetue as operações:*

$$\mathcal{U}\mathcal{A} \ ; \ \mathcal{A}\mathcal{U}^{\sqcup}$$

   e registre qual das operações permutou (1) as linhas ou (2) as colunas de $\mathcal{A}$.

   Resposta: *a multiplicação à direita, por $\mathcal{U}$, permuta as linhas de $\mathcal{A}$, e a multiplicação à esquerda, por $\mathcal{U}^t$, induz a mesma permutação sobre as colunas de $\mathcal{A}$.*

2. *Soma de linhas, soma de colunas*

   Convenção: *Vamos designar as linhas de uma matriz por L_i, a linha de ordem i. Uma expressão como*

$$aL_i + bL_j - - > L_k$$

significando que fizemos a combinação linear das linhas L_i, L_j e o resultado foi colocado em lugar da linha L_k. Considere a matriz identidade e execute

$$L_1 + L_2 --> L_2$$

obtendo a matriz $\mathcal{U}$. Defina uma matriz $\mathcal{A}$ qualquer, mas com a mesma dimensão da matriz identidade que você tiver escolhido.

(a) *Multiplique $\mathcal{U}\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}\mathcal{U}^{\sqcup}$ registrando o que ocorreu.*

(b) *Retome a matriz $\mathcal{U}$ igual a identidade, agora executando nela*

$$3L_{n-1} - 4L_n --> L_{n-1}$$

Efetue as multiplicações $\mathcal{U}\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}\mathcal{U}^t$ registrando o que ocorreu.

<u>**Resposta:**</u> *A multiplicação à direita efetua em $\mathcal{A}$ uma operação sobre as linhas e a a multiplicação à esquerda,* com a matriz transposta*, efetua em $\mathcal{A}$ a mesma operação, porém sobre as colunas. Convenção:*

$$a * C_j + b * C_k --> C_k$$

representa a combinação linear das colunas de índices j, k substituindo, com este resultado, a coluna C_k.

3. <u>*Operações inversas*</u> *Defina as duas matrizes abaixo, a partir da* matriz identidade*:*

- $\mathcal{U} : L_1 + L_2 --> L_2$
- $\mathcal{W} : L_2 - L_1 --> L_2$

Considere uma matriz arbitrária $\mathcal{A}$, mas com a mesma dimensão da matriz identidade que você tiver escolhido. Efetue as operações, nesta ordem, e registre o resultado:

- $\mathcal{C} = \mathcal{U}\mathcal{A}$; $\mathcal{W}\mathcal{C}$
- $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{U}$; $\mathcal{C}\mathcal{W}$
- $\mathcal{U}\mathcal{W}$; $\mathcal{W}\mathcal{U}$

<u>**Resposta:**</u> *A matriz $\mathcal{W}$ inverte a operação que $\mathcal{U}$ tiver feito, à esquerda, com as linhas. O mesmo acontece com as matrizes $\mathcal{W}^t, \mathcal{U}^t$ relativamente as colunas, quando multiplicadas à direita.*

$\mathcal{W}, \mathcal{U}$ é um par de matrizes inversas. Da mesma forma $\mathcal{W}^t, \mathcal{U}^t$ é um par de matrizes inversas. Se você multiplicar $\mathcal{W}^t\mathcal{U}^t$ ou $\mathcal{U}^t\mathcal{W}^t$ o resultado será a identidade. Veja os cálculos feitos em `scilab`*:*

```
// definindo as matrizes A, U, W

-->A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
 A  =

!   1.    2.    3. !
!   4.    5.    6. !
!   7.    8.    9. !


-->U = [1,0,0;1,1,0;0,0,1]
 U  =

!   1.    0.    0. !
!   1.    1.    0. !
!   0.    0.    1. !

-->W = [1,0,0;-1,1,0;0,0,1]
 W  =

!   1.    0.    0. !
! - 1.    1.    0. !
!   0.    0.    1. !

// Testando: U,W  inversas uma da outra

-->U*W
 ans  =

!   1.    0.    0. !
!   0.    1.    0. !
!   0.    0.    1. !

-->W*U
 ans  =

!   1.    0.    0. !
!   0.    1.    0. !
!   0.    0.    1. !

// W desfaz a operacao feita por U

-->C=U*A
 C  =

!   1.    2.    3. !
!   5.    7.    9. !
!   7.    8.    9. !
```

```
-->W*C
 ans  =

!   1.    2.    3. !
!   4.    5.    6. !
!   7.    8.    9. !
-->U'
 ans  =

  !   1.    1.    0. !
  !   0.    1.    0. !
  !   0.    0.    1. !

   -->W'
    ans  =

     !   1.  - 1.    0. !
     !   0.    1.    0. !
     !   0.    0.    1. !

     -->A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]
      A  =

       !   1.    2.    3. !
       !   4.    5.    6. !
       !   7.    8.    9. !

        -->A*U'
         ans  =

 !   1.    3.     3. !
 !   4.    9.     6. !
 !   7.    15.    9. !

  -->A*U'*W'
   ans  =

    !   1.    2.    3. !
    !   4.    5.    6. ! = A
    !   7.    8.    9. !
```

4. *Justifique cada linhas na seguinte sequência de operações com o sistema de equações $\mathcal{A}x = b$*

$$\mathcal{A}x = b \tag{6.8}$$

$$\mathcal{T}\mathcal{A}x = \mathcal{T}b \tag{6.9}$$
$$\mathcal{T}\mathcal{A}(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T})x = \mathcal{T}b \tag{6.10}$$
$$\mathcal{B}y = c \tag{6.11}$$

Ver o diagrama (fig. 5.1) página 132.

Na próxima sessão de *laboratório* vamos mostrar como você pode memorizar operações linhas feitas sobre uma matriz, que será muito mais útil do que primeiro efetuar estas operações com a identidade.

Você deve usar `scilab` para agilizar o seu trabalho. Se você quiser limpar a memória do `scilab`, use o botão `control`, quando cair o menu, selecione *restart* e `scilab` vai esquecer todas as matrizes que você tiver definido anteriormente. Mas, mesmo depois de ter reiniciado, você pode usar a seta para cima afim de repetir alguma definição já feita anteriormente. Experimente com `scilab` para ver o que queremos dizer.

Laboratório 18 *Memorização de operações Relembrando a convenção, L_i significa a linha de ordem i de uma matriz qualquer. O sinal $-- >$ significa, "coloque no lugar de". Assim*

$$a_{21}L_1 + a_{11}L_2 - - > L_2$$

significa que você deve:

1. *Multiplicar a primeira linha por a_{21};*
2. *Multiplicar a segunda linha por a_{11};*
3. *somar as linhas assim resultantes e colocar o resultado em lugar da "segunda linha"*

1. *<u>Composição de operações</u> Considere a matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ e a matriz $\mathcal{I}$ identidade de mesma dimensão que $\mathcal{A}$.*

   (a) *Em* `scilab` *defina $\mathcal{U}_1$ com as operações (permutação de linhas)*

   $$L_1 - - > L_2 - - > L_1$$

   e calcule (com `scilab`*)*
   $$\mathcal{U}_1\mathcal{A}.$$

   (b) *Em* `scilab` *defina $\mathcal{U}_2$ com as operações (permutação de linhas)*

   $$L_3 - - > L_2 - - > L_3$$

   e calcule (com `scilab`*)*
   $$\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1\mathcal{A}.$$

(c) *Calcule (com* `scilab`*)*

$$\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1\mathcal{A}\ ;\ \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2\mathcal{A}$$

(d) *Escolha as alternativas corretas (duas):*

i. $\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1\mathcal{A}$ *permuta as linhas de* $\mathcal{A}$ *efetuando*

$$L_1 --> L_2 --> L_3 --> L_1$$

ii. $\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1\mathcal{A}$ *permuta as linhas de* $\mathcal{A}$ *efetuando*

$$L_1 --> L_3 --> L_2 --> L_1$$

iii. $\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1$ *é a composta das duas permutações*

$$L_1 --> L_2 --> L_1, L_2 --> L_3 --> L_2$$

nesta ordem.

iv. $\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1$ *é a composta de das duas permutações*

$$L_2 --> L_3 --> L_2, L_2 --> L_1 --> L_2$$

nesta ordem.

Resposta: *Corretas (i), (ii), (iii)*

2. *Operações-linha* *Considere o esquema matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *em que você pode identificar a matriz* identidade *e a matriz* $\mathcal{A}$ *justapostas.*

Execute (sobre todo o "esquema"), a junção das matrizes ($\mathcal{A}$) *e identidade, as as seguintes operações, re-escrevendo um novo "esquema" depois de cada operação executada.*

(a)

$$4 * L_1 - L_2 --> L_2$$

(b)

$$7 * L_1 - L_3 --> L_3$$

Em `scilab` *basta apertar duas vezes a seta para cima e atualizar a matriz* $\mathcal{U}$ *e voltar a multiplicar pela* **matriz original**.

(c)

$$6 * L_2 - 3 * L_3 --> L_3$$

(d) *Use a última operação, com troca de sinal, para verificar que não há unicidade de solução, quer dizer, você pode chegar ao esquema final*
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) *Verifique que a multiplicação das matrizes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

produz a forma escalonada da matriz $\mathcal{A}$.

(f) *Escolha as opções corretas:*

i. *A matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ *é a composta das tres operações feitas, passo-a-passo sobre a matriz* $\mathcal{A}$.

ii. *A matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ *é o produto das matrizes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

nesta ordem.

iii. *A matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ *é o produto das matrizes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nesta ordem

iv. *A matriz* $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ *é a composta das operações efetuadas na matriz* $\mathcal{A}$ *e a multiplicação* $\mathcal{MA}$ *produz uma matriz escalonada.*

Resposta: *Corretas A,C,D. Em B, o erro, é a ordem como as matrizes estão sendo multiplicadas.*

3. *Escolha as alternativas corretas para completar a afirmação "As operações feitas sobre as matrizes* $\mathcal{U}$ *são ...."*

(a) *... do tipo*

$$aX + Y$$

em que X, Y *são linhas (ou colunas) da matriz;*

(b) *... do tipo*

$$aX + Y - - > Z$$

em que X, Y, Z *são linhas (ou colunas) da matriz e* $Z \in \{X, Y\}$.

(c) ... *do tipo*

$$aX$$

em que X *é uma linha (ou coluna) da matriz;*

(d) ... *inversíveis (tem uma operação inversa).*

(e) ... *tais que se* Z *for uma linha modificada na matriz* $\mathcal{U}$ *pela operação*

$$aX + Y$$

em que X, Y *são todas linhas ou colunas da matriz, então a operação* $\frac{1}{a}(Z - Y)$ *é a operação inversa.*

(f) ... *tais que se* Z *for a linha modificada na matriz* $\mathcal{U}$ *pela operação*

$$aX + Y$$

em que $X, Y, Z \in \{X, Y\}$ *são, ambas, linhas ou colunas da matriz, então a operação* $\frac{1}{a}(Z - Y)$ *é a operação inversa.*

Resposta: *Corretas ii, iv, vi.*

4. *Mudança de base*

   (a) *Considere o sistema* $T\vec{x} = \vec{b}$. *Justifique por que a seguinte sequência lógica (e de operações) garante que ainda temos o mesmo sistema:*

$$T\vec{x} = \vec{b} \equiv \mathcal{A}T\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \tag{6.12}$$

$$\mathcal{A}T\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \tag{6.13}$$

$$\equiv T'\vec{x'} = \vec{b'} \tag{6.14}$$

   se a matriz $\mathcal{A}$ *for inversível (*não singular*).*

   (b) *Considere que o sistema* $T\vec{x'} = \vec{b'}$ *foi modificado de um sistema original (mudança de base) sendo a matriz inversível (não singular)* $\mathcal{A}$ *a matriz de mudança de base. Mostre qual das opções abaixo devolve o sistema primitivo:*

   i. $x = \mathcal{A}^{-1}x'$.
   ii. $x = \mathcal{A}x'$.
   iii. $x = \mathcal{A}^{-1}x'\mathcal{A}$.

   Resposta: *(i)*

6.1.3 Discutindo as experiências do *laboratório*

Operações elementares

operações elementares-linha
operações elementares-coluna

As matrizes[1] que chamamos $\mathcal{U}$ representam operação do tipo

$$aX + Y - - > Z$$

em que X, Y são, ambas, linhas ou colunas de uma matriz. Esta operação tem sempre uma inversa que é

$$\frac{Z - Y}{a}$$

em que Z é a linha modificada. As duas equações acima são exatamente similares ao par de equações inversas, numéricas:

$$z = ax + y \ ; \ x = \frac{z - y}{a}$$

assim demonstramos o teorema

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **33** *Operações-linha elementares*
As operações-linha são representáveis por matrizes inversíveis cujas inversas também são operações-linha.

Estamos usando a frase "operações-linha elementares"sem justificar o adjetivo.

Operação-linha é uma sucessão de operações elementares. E *operação elementar* é uma operação do tipo

1. do tipo
$$aX + bY - - > Z$$
em que Z é uma das linhas X, Y ou

2. uma permutação de linhas.

o que, possivelmente, já ficou óbvio a partir do uso. Você já deve ter observado que estas operações não alteram um sistema de equações lineares cuja matriz for modificada por estas operações.

Estes dois tipos de operações são inversíveis, e consequentemente uma composição, de qualquer quantidade delas, será inversível também.

Matrizes que representam operações elementares

O laboratório nos sugeriu que estas operações podem ser representadas por uma matriz. Simulamos, com `scilab`, a representação das operações modificando, sucessivamente, a matriz identidade. Quando chegamos á matriz escalonada, o conjunto das operações está *memorizado* no produto de matrizes.

Embora tenhamos usado exemplos de matrizes 3 x 3 fica claro que a dimensão pode ser arbitrária:

$$aL_p + bL_q - - > Z \ ; \ Z \in \{L_p, L_q\} \ ; p, q \leq n \tag{6.15}$$

$$\tfrac{-aL_p + L_q}{b} - - > Z \ ; \ Z \in \{L_p, L_q\} \ ; p, q \leq n \tag{6.16}$$

[1] esta não é uma notação padrão

é um par de operações inversas copiadas do par de equações numéricas inversas (pouco tradicionais)

$$ax + by --> z \ ; \ z \in \{x, y\} \tag{6.17}$$
$$\frac{-ax+y}{b} --> z \ ; \ z \in \{x, y\}. \tag{6.18}$$

O sinal $-->$ muitas vezes é substuido pelo "recebe"da linguagem de programação `Pascal` e neste caso as equações numéricas se escreveriam assim

$$p, q \leq n \tag{6.19}$$
$$L_q := aL_p + bL_q \Longrightarrow \tag{6.20}$$
$$L_q := -aL_p \Longrightarrow \tag{6.21}$$
$$L_q := \frac{L_q}{b} \tag{6.22}$$

(21) e (22) é a seqüência de operações que inverte a primeira operação, feita na equação (20).

Usamos uma expressão *não definida*, "sequência de operações" e é preciso tornar este conceito bem definido:

- Cada matriz $\mathcal{U}$ que definimos acima, representa uma "operação", uma operação-linha.
- Multiplicamos, sucessivamente, (observe a ordem),

$$\ldots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1$$

- As matrizes ao final são o resultado da multiplicação:

$$\mathcal{U}_n \ldots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \ ; \mathcal{U}_n \ldots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{A}$$

- A "seqüência de operações" é o produto, (observe a ordem),

$$\mathcal{U}_n \ldots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1.$$

Falamos *produto de matrizes* porque a matriz que se encontra à esquerda foi sucessivamente modificada,

$$\mathcal{U}_1 \mathcal{A} \tag{6.23}$$
$$\mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{A} \qquad \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{A} \tag{6.24}$$
$$\mathcal{U}_n \ldots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{A} \tag{6.25}$$

foi sendo multiplicada à esquerda pela matriz identidade modificada, veja abaixo as operações feitas com `scilab`

```
 A  =
!   1.    2.    3. !
```

```
!   4.    5.    6. !
!   7.    8.    9. !

 U1  =

!   1.    0.    0. !
!   4.  - 1.    0. !
!   0.    0.    1. !

-->U1*A
 ans  =

!   1.    2.    3. !
!   0.    3.    6. !
!   7.    8.    9. !

-->U2*U1*A
 ans  =

!   1.    2.    3.  !
!   0.    3.    6.  !
!   0.    6.    12. !

-->U3*U2*U1*A
 ans  =

!   1.    2.    3. !
!   0.    3.    6. !
!   0.    0.    0. !
```

em que $U1, U2, U3$ é cada uma das operações elementares-linha efetuada, sucessivamente sobre a matriz $\mathcal{A}$.

Escalonamento de matrizes

Isto sugere

Teorema **34** *Escalonamento de matrizes*

Dada uma matriz n x n qualquer, cada uma das operações elementares é uma operação inversível, portanto o escalonamente sendo um produto de operações inversíveis, é uma operação inversível.

Uma formulação equivalente deste teorema é

Teorema **35** *Escalonamento de matrizes*

Dada uma matriz $\mathcal{T}$, n x n, qualquer, existe uma matriz inversível $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{A}\mathcal{T}$$

é uma matriz escalonada, triangular superior.

Laboratório 19 *Escalonamento e resolução de sistemas*

1. *Escalone o sistema* $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, *memorize as operações na matriz identidade, e determine a matriz $\mathcal{A}$ que transforma o sistema primitivo no sistema com matriz escalonada.*

2. *Escalone a matriz do sistema* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *e discuta se ele tem solução.*

3. *Escalone a matriz do sistema* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e discuta se o sistema solução e compare com a solução do sistema anterior.*

4. *Discuta o sistema linear* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5. *Escalone o sistema* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *e memorize na matriz identidade as operações feitas de modo a ter ao final a matriz $\mathcal{A}$ que efetua o conjunto das operações feitas. Discuta o sistema.*

6. *Mostre que, se T for uma matriz simétrica, existe um matriz $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{T}\mathcal{A}^{-1}$ é uma matriz diagonal.*

7. *sistemas equivalentes* *Considere o sistema $\mathcal{T}x = b$. Prove algebricamente que, se*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

for uma solução do sistema e se $\mathcal{A}$ for `inversível` *então o $\vec{v}$ é solução do sistema*

$$\mathcal{A}\mathcal{T}x = \mathcal{A}b.$$

Definição 30 *Sistemas lineares equivalentes Diremos que dois sistemas de equações lineares*

$$\mathcal{T}x = b, \mathcal{M}y = c$$

são equivalentes, se houver uma matriz inversível $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{A}\mathcal{T} = \mathcal{M} \ ; \mathcal{A}b = c$$

As matrizes $\mathcal{T}, \mathcal{M}$ se dizem semelhantes .

8. *Considere o sistema de equações lineares*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Encontre a solução geral deste sistema.

9. *<u>não unicidade do escalonamento</u> Considere o sistema de equações*

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{6.26}$$

Verifique que podemos obter

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

ou a forma escalonada reduzida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{6.28}$$

e verifique que ambos os casos (não podia ser diferente...) a solução é

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \ ; \ t \in \mathbf{R} \tag{6.29}$$

A conlusão final, dos experimentos do *laboratório*, é:
Dada uma matriz $\mathcal{A}$

- as operações-linha permitem-nos de sucessivamente anular todos os elementos que se encontram abaixo da diagonal.
- cada operação-linha elementar é representa por uma operação-linha elementar efetuada na matriz *identidade*
- a sequência de operações-linha elemntares corresponde a um produto de matrizes à esquerda. O produto destas matrizes *memoriza* todas as operações-linha numa matriz que chamamos $\mathcal{M}$.
- $\mathcal{M}\mathcal{A}$ é uma matriz escalonada superior, tem zero em todas suas entradas abaixo da digonal principal.
- O escalonamento não é unico, podemos escalonar de muitas maneiras diferentes, mas a solução tem que ser a mesma porque o sistema não foi alterado. As matrizes *inicial* e *final* são semelhantes, porque os sistemas são equivalentes.
- de forma absolutamente análoga temos as operações-colona de modo que podemos resumir dizendo que o conjunto das operações-coluna fica memorizado numa matriz $\mathcal{N}$
- $\mathcal{A}\mathcal{N}$ é uma matriz escalonada inferior, tem zero em todas suas entradas acima da digonal principal.
- Se a matriz $\mathcal{A}$ for simétrica (simétrica em torno da diagonal), quer dizer, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^t$ então podemos executar aos pares cada operação-linha com a equivalente operação-coluna o que nos levará a uma *matriz diagonal*, uma matriz de valores próprios que é um resultado que anunciamos no capítulo 5.

Teorema 36 *Matriz de autovalores Toda matriz simétrica pode ser diagonalizável.*

Dem : *Considere a matriz simétrica $\mathcal{A}$*

- *as operações elementares-linha podem anular todos os elementos abaixo da diagonal principal;*
- *cada operação elementar-linha é representada pela multiplicação à esquerda por uma matriz na qual foi efetuada a operação elementar-linha, que vamos chamar de matriz elementar;*
- *as matrizes elementares efetuam a mesma operação elementar-coluna quando multiplicadas à direita;*
- *Consideremos então a sequência finita*

$$\mathcal{M}_k, \ldots, \mathcal{M}_1$$

  que anulam passo-a-passo as entradas abaixo da diagonal principal.
- *Pela simétria, o produto*

$$\mathcal{B} = \mathcal{M}_k \cdots \mathcal{M}_1 \mathcal{A} \mathcal{M}_1 \cdots \mathcal{M}_k$$

  anulam todas as entradas de $\mathcal{A}$ abaixo e acima da diagonal principal, portanto $\mathcal{B}$ é uma matriz diagonal.

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Exercícios 8 *Operações elementares linha*

1. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.30}$$

2.
3.
4.

6.2 Matrizes singulares e não singulares

Já definimos, na página 61 o que é matriz *não singular*, a que tem inversa.

Uma matriz é *não singular*, ou *inversível*, se for `quadrada`, e se houver uma matriz $\mathcal{B}$ da mesma dimensão que $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = \mathcal{I}$ em que $\mathcal{I}$ é a matriz identidade da mesma dimensão que $\mathcal{A}$.

O *experimento de laboratório* (ex. 4b), na página 147, mostra como se utilizam matrizes inversíveis para alterar a base de um espaço vetorial com o objetivo de obter uma matriz mais simples para um sistema de equações.

A próxima sessão de *laboratório* tem o objetivo de fixar estas idéias.

Laboratório 20 *Sistemas equivalentes*

1. *Verifique por cálculo direto qual das matrizes seguintes*

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

   tem inversa, (é `não singular`*).*

   Resposta Apenas a terceira, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$*, é uma matriz singular.*

2. *inversão passo-a-passo de uma matriz*

Observação 14 *Memorização de operações. Ao efetuar uma multiplicação na matriz quadrada $\mathcal{T}$ podemos memorizar esta operação fazendo a mesma multiplicação na matriz identidade. O resultado desta* memorização *é uma matriz inversível, a* matriz de passagem.

$$\begin{array}{cc} \mathcal{M}_1\mathcal{I} & \mathcal{M}_1\mathcal{T} \\ \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{I} & \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{T} \\ \mathcal{M}_n\cdots\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{I} & \mathcal{M}_n\cdots\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{T} \\ \mathcal{M}\mathcal{I} & \mathcal{M}\mathcal{T} \end{array}$$

Em cada uma das linhas acima temos, sucessivamente, o produto de matrizes $\mathcal{M}_i$ operando de um lado sobre a identidade e do outro sobre $\mathcal{T}$.

Na última linha temos a matriz $\mathcal{M}$ que memoriza o produto das matrizes $\mathcal{M}_i$ efetuado sobre $\mathcal{T}$.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_n \cdots \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1. \tag{6.31}$$

Algumas vezes este método produz a inversa de uma matriz $\mathcal{T}$, se ela for inversível, se na última linha tivermos

$$\mathcal{M}\mathcal{T} = I \tag{6.32}$$

mas isto é pouco provável e portanto não tem interesse como método para inversão de matrizes, *o real interesse no mé todo é que ele irá indicar se a matriz* é *ou* não é *inversível. O próximo exercício ilustra a aplicação do método.*

Nós veremos, posteriormente, uma variante deste método que construi a inversa de uma matriz, se ela for não singular. *A idéia, aqui, é a da triangularização de uma matriz.*

- *Multiplique a matriz* $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$*, a esquerda, pela matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ *verficando que o resultado é o anulamento do segundo elemento da primeira coluna.*
- *Multiplique a matriz $\mathcal{T}$ assim resultante pela matriz* $\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/1.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *resultando na matriz diagonal* $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$.
- *Descubra uma matriz diagonal$\mathcal{M}_3$ que multiplicada pela última matriz, resulte na identidade, (a inversa de* $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$*).*
- *A matriz que faz todo o trabalho, e memoriza as tres operações efetuadas, é $\mathcal{M} = \mathcal{M}_3\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1$. Verifique isto. Esta matriz-produto é também a matriz inversa da matriz original.*

3. *Calcule a inversa da matriz* $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ *usando o método descrito na questão anterior.*

4. *Verifique que a matriz* $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ *não tem inversa, devido uma impossibilidade de aplicar o método de* inversão passo a passo.

5. *Solução de um sistema de equações.*

   (a) *Considere a* equação linear $\mathcal{T}\vec{X} = B \equiv \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. *Encontre uma matriz $\mathcal{M}$, não singular, tal que a nova* equação linear $\mathcal{M}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{M}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *seja algebricamente idêntica à anterior e a nova matriz seja diagonal.*

(b) *Resolva a nova* equação linear*, e verifique, testando a solução na anterior, que ela é solução da* equação linear *antiga.*

No *laboratório* chegamos à conclusão de que algumas matrizes tem inversas, mas que existem as *matrizes singulares...*

O método desenvolvido mostra que podemos encontrar matrizes equivalentes, no *formato triangular* e uma nebulosa noção de *determinante*[2] foi sendo implantada, que para as matrizes triangulares, é o produto dos elementos da diagonal. Mas não estamos em condição de provar que

Teorema 37 *Produto de detereminantes*
O determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes:

$$det(\mathcal{MT}) = det(\mathcal{M})det(\mathcal{T}) = det(\mathcal{A}) \Longleftarrow \mathcal{MT} = \mathcal{A}$$

e que assim o determinante da matriz triangular é diferente de zero sempre que determinante da matriz do sistema de equações originais o for, *mas isto é verdade.* Este é um elo que ficará faltando na teoria desenvolvida neste livro.

Precisamos fundamentar os fatos do *laboratório*, provar que o método de triangularização é *universal*, isto é, se aplica a todas as matrizes quadradas. Vamos redigir a demonstração com o *sabor* de um programa de computação, ou como ainda se diz, numa *linguagem algoritmica.*

Consideremos, para isto, uma matriz n x n arbitrária.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

Hipótese 1 $a_{11} \neq 0$ *Consideremos por hipótese que* $a_{11} \neq 0$

Vejamos que sempre será possível, a menos de alterações na matriz que produzam um *sistema equações equivalentes*, e, é esta equivalência, que nos interessa:

- Se $a_{11} = 0$ mas algum outro elemento da primeira linha for diferente de zero, podemos trocar as colunas da matriz de modo que o "novo" a_{11} seja diferente de zero. Isto na prática corresponde a troca da ordem das "variáveis" $x_1, ..., x_n$ do sistema portanto não altera o significado do *sistema de equações*;
- Se a primeira linha for toda nula, e houver alguma linha que não o seja, podemos levar esta linha não nula para o primeiro lugar, troca de linhas, corresponde a troca na ordem das coordenadas do vetor de dados $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ e portanto não altera o significado do *sistema de equações.*

[2] Neste livro não definiremos o determinante de uma matriz, porque não precisaremos diretamente deste conceito.

- Se nada disto for possível temos um sistema nulo, uma matriz nula, que é uma matriz triangular superior, como queremos. Voltaremos a discussão sobre sistemas nulas ao final.

Isto prova a *consistência de nossa hipótese*, fora do caso do sistema nulo que foi discutido sumariamente acima. Este é o primeiro passo num programa para resolver sistemas lineares, identificar se $a_{11} \neq 0$ e, não sendo, produzir as permutações de linhas ou colunas mencionadas acima.

Vamos adotar uma técnica que não empregamos no laboratório porque para as contas feitas manualmente ela representa um complicante, mas ela é excelente na implementação de programas para resolver sistemas de equações. É nossa segunda hipótese

Hipótese 2 $a_{11} = 1$

Se a hipótese não for verdadeira vamos dividir a primeira linha por a_{11} de modo a torná-la verdadeira, (inclusive o primeiro elemento do vetor de dados) e consequentemente ainda teremos um *sistema equações equivalente* ao primitivo.

Observação 15 *Notação computacional*

Observe que estamos usando o método algoritmico da computação.

Onde escrevemos a_{ij} deveriamos estar escrevendo

$$a_{ij}^{'}, \dots a_{ij}^{'''}$$

porque a cada passagem estamos substituindo os elementos da matriz por outros obtidos por combinações lineares.

*Num programa de computação isto se faz simplesmente com o comando "=" que nada tem a ver com o teste lógico-matemático "=". Em boa matemática clássica se usava com frequência a frase, "*fazendo *$A = B$" que equivale ao comando "$A = B$" da computação em que, a partir do ponto em que se escreve esta linha, A passa a ter o valor que for evaluado para B.*

Não é atôa que anunciamos que este texto é de Matemática com apoio computacional...

Vamos agora nos referir às linhas da matriz como os vetores-linha $\mathbf{a}_i$ e sucessivamente, a partir da segunda linha da matriz, vamos fazer a substituição:

$$\mathbf{a}_i = a_{i1}\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_i \ ; \quad c_i = a_{i1}c_1 - c_i \tag{6.34}$$

verifique que isto substitue a linha de ordem $\underline{i}$ por uma linha que lhe é equivalente, do ponto de vista de sistema de equações. Na nova linha o primeiro elemento é nulo: *substituimos uma equação pela soma de duas equações*, isto não altera o sistema de equações.

E agora iteramos o processo iniciando com a segunda linha:

- $\underline{a_{22}}$ o segundo elemento da segunda linha deve ser igual a 1 elemento;

- $\underline{a_{22} = 1}$ aplicamos a segunda hipótese
- com a segunda linha anulamos todos os segundos elementos das demais linhas abaixo da segunda.
- isto será possivel a menos que a matriz a partir da segunda coluna já seja totalmente nula o que reduz o sistema a primeira linha, ou às primeiras para as quais conseguimos aplicar o processo.

Isto prova que sempre poderemos, com combinação linear de linhas, e depois de $n(n-1)$ operações (sem contar com as somas e multiplicações ...), transformar uma matriz $\mathcal{A}$ em uma matriz triangular superior $\mathcal{T}$. Isto sumarizamos na observacao 14, página 154.

Com a segunda hipótese facilmente escrevemos, nos programas, a solução das equações. No trabalho manual vamos evitá-la.

Sistemas cuja matriz seja nula

Num tal sistema, em que a matriz é nula, a solução é o espaço inteiro, no caso homogêneo. Em particular a matriz é triangular superior, como já observamos e portanto a técnica desenvolvida no *laboratório* se aplica.

6.3 Mudança de base e mudança de matriz

> Nos cursos de Geometria Analítica se estuda a *mudança de referencial* que fica muitas vezes pouco clara, no seu objetivo. Aqui teremos uma forma de retomar esta técnica num contexto que irá mostrar a sua importância: *pode existir* uma base para o espaço vetorial em que a *matriz de uma transformação linear* fica muito simples.
> Vamos, inicialmente, estudar um tipo de simplificação caracterizada pelas palavras-chave *autovetor e autovalor*, usaremos esta forma simplificada para discutir outras formas simplificadas para as matrizes.
> A mudança de base é a mudança de referencial.

Introduzimos os conceitos

- *sistemas equivalentes* ;
- *matrizes equivalentes* do ponto de vista do sistema de equações que elas representam (ou podem representar);

que ficou caracterizado pela equação

$$\mathcal{T}x = b \equiv \mathcal{A}x = \mathcal{A}b = b' \ ; \ \mathcal{A} = \mathcal{M}\mathcal{T} \tag{6.35}$$

e denominamos a matriz inversível $\mathcal{M}$ que memorizou as transformações das operações-linha de *matriz de passagem* entre os dois sistemas equivalentes, o novo e o velho.

Mas na equação acima tem um erro visível que é preciso corrigir, sem comentários, correta, a equação fica:

$$\mathcal{T}x = b \equiv \mathcal{A}x' = \mathcal{A}b = b' \ ; \ \mathcal{A} = \mathcal{M}\mathcal{T} \tag{6.36}$$

porque a solução que iremos encontrar para o sistema, não é exatamente a original. A matriz das variáveis, possivelmente, foi alterada... Muitas vezes este fato passa desapercebido, outras vezes ele representa uma modificação que precisa ser *desfeita* para que a resposta se coloque no "formato original do problema".

Lembre-se que as matrizes representam transformações "geométricas do espaço de saída para o espaço de chegada, rotações, homotetias, ou achatamentos violentos, levando espaços inteiros a se concentrarem em espaços de dimensão menor, (e o caso em que a *liberdade* da matriz é grande, maior do que 1).

Claro, agora estamos nos referindo à matriz de passagem $\mathcal{M}$ que é inversível, por construção (ainda não mostramos isto) e portanto $Ker(\mathcal{M}) = \{0\}$. Isto é necessário para que os sistemas, o novo e o velho, sejam equivalentes.

Então o que encontramos foi x' e não x. Na linguagem dos espaços vetoriais o que houve foi uma *mudança de base.* Vamos tornar estas idéias mais concretas no próximo *laboratório.*

Laboratório 21 *Mudanças de base*

1. *Escalone o sistema* $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, *memorize as operações na matriz identidade, e determine a matriz* $\mathcal{A}$ *que transforma o sistema primitivo no sistema com matriz escalonada.*

2. *Escalone a matriz do sistema* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *e discuta se ele tem solução.*

3. *Escalone a matriz do sistema* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e discuta se o sistema solução e compare com a solução do sistema anterior.*

4. *Discuta o sistema linear* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5. *Escalone o sistema* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *e memorize na matriz identidade as operações feitas de modo a ter ao final a matriz* $\mathcal{A}$ *que efetua o conjunto das operações feitas. Discuta o sistema.*

6. *Mostre que, se* T *for uma matriz simétrica, existe um matriz* $\mathcal{A}$ *tal que* $\mathcal{A}\mathcal{T}\mathcal{A}^{-1}$ *é uma matriz diagonal .*