Capítulo 4

Conjuntos numéricos fundamentais.

Neste capítulo vamos seguir o conselho de Kroneker e considerar o conjunto dos números naturais absolutamente bem conhecido. A partir dele construiremos o conjunto dos números inteiros e depois com este último construiremos o conjunto dos números racionais. Finalmente, faremos a construção geométrica do conjunto dos números reais, a reta real, seguindo uma receita de David Hilbert, contida no seu famoso livro "fundamentos da geometria" e depois mostraremos que esta construção geométrica e algebricamente compatível com a estrutura do conjuntos dos números racionais que será então visto como um subconjunto da reta real.

4.1 O conjunto dos nÃºmeros naturais.

Não, não vamos construir o conjunto **N**. Vamos apenas falar um pouco dele e construir alguns exemplos para estabelecer uma linguagem adequada para o resto do capítulo.

Vamos deixar claro o que já sabemos sobre **N**, estabelecer as regras do jogo. Como dissemos em nossos primeiros exemplos sobre *estrutura*, um *conjunto* pode ser pode ser um agregado amorfo de objetos. Quando observamos que algumas *propriedades* ou *métodos* se encontram presentes, o conjunto passa a ser uma *estrutura*. Há vários tipos de estrutura em Matemática: *estruturas algébricas*, ver [3] ou [5], estruturas topológicas, estruturas geométricas, etc... Cada uma destas estruturas define um campo de atividade em Matemática e a interação entre elas é *fazer Matemática*.

Vamos "descobrir" qual é estrutura algébrica de **N**.

4.1.1 A estrutura algébrica de N.

Temos dois *método* em **N** para construir mais um elemento do conjunto a partir de dois conhecidos:

- **a adição** é um desses métodos simbolizada por $c = a + b$ em que c é o novo elemento obtido a partir de dois outros $a, b \in \mathbf{N}$.
- **a multiplicação** é o outro método simbolizada por $c = a \ \text{x} \ b$ em que c é o novo elemento obtido a partir de dois outros $a, b \in \mathbf{N}$. Quando não há dÃºvida

a multiplicação é simbolizada por justaposição: $3a = 3 \text{ x } a$. Entretanto, em **N**, a multiplicação é soma repetida, $3a = a + a + a$.

- **N tem um primeiro elemento** Nós adotaremos o zero como este primeiro elemento. Há autores que preferem que seja 1. O essencial é verdade que **N** tem um primeiro elemento. Todos os outros são obtidos como *soma repetida* deste primeiro elemento com o 1.
- **sucessor** Em particular diremos que $a+1$ é o sucessor de a. Isto quer dizer que `entre` a e $a+1$ não há nenhum nÃºmero natural.
- Consequentemente podemos construir o conjunto **N**
  - Com o primeiro elemento;
  - Com o "método" de determinação do sucessor.

Foram estes tres Ãºltimos axiomas que *Peano* descobriu. Infelizmente os *axiomas de Peano* se aplicam com perfeição ao conjunto

$$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

em que -5 é o primeiro elemento, logo também, segundo Peano,

$$\mathbf{N} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

o que naturalmente não é verdade. Isto apenas mostra a fraqueza dos axiomas de Peano para definir "número natural". É melhor, portanto, evitar a definição e aderir à frase de Dedekind, "Deus criou os números naturais, e resto nós criamos."

Usando todas estas informações podemos provar, (*mas nós não vamos fazÃª-lo*):

Teorema 25 *Propriedades de* $(N, +, \cdot)$.

1. *A adição é comutativa.*
2. *A adição é associativa.*
3. *Existe o elemento neutro para a adição, se considerarmos* 0 *como primeiro elemento de* **N**.
4. *A multiplicação é comutativa.*
5. *A multiplicação é associativa.*
6. *Existe o elemento neutro para a multiplicação.*
7. *A multiplicação é distributiva relativamente à adição.*
8. $(\forall\ a \in \mathbf{N})\ (0 \text{ x } a = 0)$, *e se* $a \text{ x } b = 0$ *então* $a = 0$ *ou* $b = 0$.

Usaremos este conjunto para construir todos os demais conjuntos numéricos que se usa em Mamtemática. Os exercícios seguintes são um exemplo de construção típica do início do século 20 quando houve uma intensa atividade objetivando uma rigorosa linguagem matemática. Hoje sabemos que este rigor todo é inviável sem criar contradições. Não sabemos porque, mas é assim. Se você não se sentir motivado para fazer os exercícios, deixe-o de lado, e talvez volte aos mesmos n'outra ocasião.

Exercício 12 *Uma pequena amostra do "Principia".*

1. *Quantos elementos têm os conjuntos seguintes:*

a) $\{a\}$	*b)* $\{\{a\}\}$	*c)* $\{\{\{a\}\}\}$	*d)* $\{\{a\},\{a\}\}$
a) $\{\}$	*b)* $\{\{\}\}$	*c)* $\{\{\{\}\}\}$	*d)* $\{\{\},\{\}\}$

2. *Verifique que* $\{\} \cup \{\} = \{\}$. *Verifique que* $\{\{\}\} \cup \{\} = \{\{\}\}$.
3. *Verifique que a união dos conjuntos* $\{a\}, \{\{a\}\}$ *é um conjunto com dois elementos.*
4. *Verifique que a união dos conjuntos* $\{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}$ *é um conjunto com dois elementos.*
5. *Defina um método que consista em criar um novo conjunto unitário a partir de* $\{\}$ *inserindo o elemento* $\{\}$. *Verifique que este método é equivalente a operação de sucessor de Peano no sentido de que com a união produz um novo conjunto cujo cardinal é maior do que dos conjuntos existentes.*

Observação 13 *Unidade é um conceito realativo*

Em algum momento na história, algum rei decidiu que a unidade era o seu braço.

Em 1979, com a Revolução Francesa, se passou a pensar em unidades universais e os revolucionários franceses, para se oporem aos aristocratas ingleses, criaram o sistema métrico que foi adotado no mundo inteiro, exceto na Inglaterra e nos Estados Unidos. Mas mesmo nestes países, veladamente, é feito o uso do sistema métrico.

Mas há momentos em que você não consegue encontrar nenhum padrão de unidade à sua volta, mas precisa de estabelecer o que é a unidade.

Escolha algo que esteja a sua volta e que possa servir para comparar com outras coisas, esta será a sua unidade, *naquele momento.*

Suponha que você queira construir um quadrado de lado $(a + b)$. *Serviria para ilustrar o produto notável* $(a + b)^2$. *Se você tiver à mão uma folha de isopor e quiser construir pequenos retângulos, a unidade mais prática poderá ser a expessura desta folha.*

É você quem determina o que unidade, *apenas mantenha a sua unidade o tempo todo.*

Observação 14 *A construção feita por* $\mathbf{N}$ *de Russel*

Foi este método ardiloso que levou Russel e Whitaker a constuirem os nÃºmeros naturais tendo zero como primeiro elemento. Para quem for curioso, havia um exemplar do Principia Matemática *na biblioteca da Univ. Federal do CearÃ¡.*

Então, "união do vazio com o vazio, resulta no vazio" e *"reunião do vazio com um conjunto unitário, resulta num conjunto unitário".*

Não estamos sugerindo que vocÃª siquer deva ler o `Principia`, *mas se alguma vez você se decidir por se aprofundar em Lógica, sem dÃºvida que este poderá ser um caminho.*

4.1.2 A ordem em N.

Da mesma forma como sabemos tudo sobre *adição* e *multiplicação* também sabemos tudo sobre a relação de ordem em $\mathbf{N}$. Vamos listar suas propriedades para referência posterior.

Teorema 26 *da estrutura de ordem em* $\mathbf{N}$..

Existe uma relação de ordem em $\mathbf{N}$ *compatível com o método de* sucessor

$$m < m + 1$$

e tal que que

- $\forall\ p \in \mathbf{N}\ m \leq n \quad \Rightarrow \quad m+p \leq n+p$
- $\forall\ p \in \mathbf{N}\ m \leq n \quad \Rightarrow \quad pm \leq pn$

Observe que de acordo com a estrutura lógica deste livro, não temos que demonstrar nada sobre **N** e seus métodos, tudo é conhecido.

Para aquecer o seu apetite lógico, o conceito de sucessor, usado no Teorema 26 pode ser usado para demonstrar todas as propriedades de **N** listadas no Teorema anterior.

4.2 Os números inteiros.

Podemos facilmente conjecturar que o aparecimento dos inteiros deve ter se dado junto com as primeiras concepções econômicas quando alguém teve a necessidade de registrar o que *tinha* e o que *devia*. Formalmente podemos inventar os inteiros a partir dos números naturais impondo um problema algébrico: *queremos encontrar um conjunto que estenda o conjunto dos números naturais onde sempre a equação*

$$m + x = 0 \tag{4.1}$$

tenha solução. Vamos usar este mé todo algébrico.

4.2.1 A definição de Z.

Vamos espandir o conjunto dos números naturais criando uma solução para a equação

$$m + x = 0 \tag{4.2}$$

para cada número natural m.

Isto nos leva a inventar, para cada número natural m um novo objeto designado[1] por $-m$. O resultado desta invenção é o novo conjunto:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \tag{4.3}$$

que já difere de **N** num ponto: **Z** não tem um primeiro elemento. Depois, seguindo a tarefa de inventor, devemos nos preocupar com a extensão ao novo conjunto das *operações* de adição e multiplicação definidas em **N**. Também deveremos estender a relação de ordem de **N** a **Z**.

Vamos executar cada uma destas tarefas passo a passo, agora.

4.2.2 Extensão da adição aos inteiros.

Primeiro temos a "inventar" uma terminologia que você espera:

Definição 25 *O conjunto dos números inteiros positivos.*

Vamos particionar[2] *o conjunto* **Z**.

Poderiamos definir $-\mathbf{N}$ *sem o zero, mas quebrariamos outro hábito.*

Poderiamos dizer que é uma "quase partição" e complicariamos desnecessariamente a linguagem. $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup -\mathbf{N}$, *e algumas vezes vamos usar este vocábulo.*

---

[1] observe que -m é um único sí mbolo e não dois símbolos aglomerados.

[2] há um defeito nesta "partição" o número zero pertence tanto a $-\mathbf{N}$ como a **N**. Mas é preciso se acostumar com as contradições da Matemática.

- **números inteiros positivos.** *O conjunto* $\mathbf{N}$ *será chamado de conjunto dos números inteiros positivos. Zero é um número inteiro positivo.*
- **números inteiros negativos.** *O conjunto* $-\mathbf{N}$ *será chamado de conjunto dos números inteiros negativos. Zero é um número inteiro negativo.*

Observação 15 *Zero é positivo e negativo.*

É fácil ver que zero tem que ser tanto positivo quanto negativo, pois

- $0+0=0$ *satisfazendo os dois lados da equação que usamos para criar os novos números,*
- *ele tinha que se encontrar também entre os novos números inteiros, os inteiros negativos;*
- *e já se encontrava entre os velhos: era positivo.*

Precisaremos do seguinte método, que chamaremos `troca de sinal`:

Definição 26 *A troca de sinal.*

$$t : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \ ; \ \text{é uma função.} \tag{4.4}$$
$$x \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ t(x) \in -\mathbf{N} \ ; x + t(x) = 0; t(x) = -x \ \text{é negativo} \tag{4.5}$$
$$x \in -\mathbf{N} \ \Rightarrow \ t(x) \in \mathbf{N} \ ; x + t(x) = 0; t(x) = -x \ \text{é positivo} \tag{4.6}$$
$$\tag{4.7}$$

Por exemplo, $-3 \in -\mathbf{N} \ \Rightarrow \ t(-3) = 3 \in \mathbf{N}$.

Exercícios 18 *Troca de sinal*

1. *Calcule*
   (a) *t(3)*
   (b) *t(t(3))*
   (c) *t(3) + 3*
   (d) *t(t(3)) + 3*
   (e) *t(t(3)) + t(3)*
   (f) *t(a) + a*
   (g) *t(t(a)) + t(a)*
2. *Porque as contas acima são absurdas do ponto de vista da lógica ? sendo assim, como se justifica que se encontrem num texto didático?*
3. *Faça um gráfico da função*
   $$y = t(x) \ ; \ x \in A = \{-5, -4, -3, \dots 3, 4, 5\}$$
   Discuta a falta de lógica desta questão.

Vamos manter, algum tempo esta notação esquisita, $t(x)$ em vez de escrever $-x$ diretamente.

A extensão da adição aos inteiros é simples tendo uma ú nica complicação: quando formos somar um número inteiro positivo com um número inteiro negativo. Para este caso precisaremos comparar qual dos dois é maior em *valor absoluto* o que nos força primeiro a definir o que é *valor absoluto*. Intuitivamente o *valor absoluto* de um número é sua *distância* à origem.

Acabamos de fazer apenas um jogo de palavras.

Definição 27 *Valor absoluto. O valor absoluto de um nú mero inteiro é um número inteiro:*

$$|n| = \begin{cases} n & se\ n \in \mathbf{N}; \\ t(n) & se\ n \in -\mathbf{N} \end{cases} \tag{4.8}$$

quer dizer que se $n \in \mathbf{N}$ então $|n|$ é o próprio número inteiro n. Se $n \in -\mathbf{N}$, trocamos o sinal de n o que o joga no conjunto $\mathbf{N}$ e esta imagem é o `valor absoluto` do número negativo n.

Definição 28 *de adição em* $\mathbf{Z}$.

- *Se* $m, n \in \mathbf{N}$ *então sabemos calcular* $m + n$.
- *Se* $m, n \in -\mathbf{N}$ *então* transformamos[3] $m \mapsto t(m) \in \mathbf{N}$ $n \mapsto t(n) \in \mathbf{N}$ *e somamos* como *sabemos* $c = t(m) + t(n) \in \mathbf{N}$. *e* decodificamos c $c \mapsto t(c) = m + n - \mathbf{N}$.
- *Se* $m \in \mathbf{N}$ *e* $n \in -\mathbf{N}$ *então:*
  - *Se* $|m| \geq |n|$ *então* $m + n = m - |n|$. *Observe que à direita na equação se encontra a diferença entre dois números naturais* que não definimos ou discutimos antes, mas nós sabemos tudo sobre $\mathbf{N}$ .... *Observe também que não usamos a função "troca de sinal" porque estamos fazendo uma subtração em* $\mathbf{N}$*, coisa conhecida como tal.*
  - *Se* $|m| < |n|$ *então* $m + n = t(|n| - m)$. *Observe que primeiro calculamos* $|n| - m$ *porque nos naturais só sabemos calcular a diferença entre um númaior e um menor, nesta ordem. Depois trocamos o sinal da diferença para satisfazer a regra que reza "na soma de números com sinais diferentes*[4]*, calcula-se a diferença e se dá a soma o sinal do maior".*
- *A adição é comutativa em* $\mathbf{Z}$

Na lista de exercícios seguinte vamos construir o sistema aritmético típico dos computadores digitais que usamos. Você verá assim um outro tipo de "regra dos sinais".

Exercícios 19 *Questões de lógica*

1. *Como justificar que teremos de demonstrar as propriedades das operações em* $\mathbf{Z}$ *e já dissemos que a adição era comutativa, em um item, da definição? Ou o texto está errado?*
2. *Rastreie os erros lógicos na construção feita acima.*
3. *sistema binário Suponha que o odômetro de um carro seja composto de apenas zeros e uns, um odômetro binário, e que o maior número neste odômetro seja* 11111111 *o equivalente a* 7 *no sistema decimal de numeração. Quer dizer que, quando o carro rodar mais um kilômetro o odômetro binário vai zerar, portanto*

   $$111 + 1 = 0 \tag{4.9}$$

   na aritmética deste odômetro.

---

[3] veja o que dissemos no capítulo "Relações e funções"sobre transformações, ver transformações.

[4] leia corretamente, um positivo e outro negativo...

(a) <u>*tabuada binária*</u> *Preencha a tabuada de adição desta aritmética no quadro abaixo: (observe, somente 0,1).*

+	0	1	10	11	100	101	110	111
0								
1								
10								
11								
100								
101								
110								
111								

(b) <u>*equações*</u> *Resolva a equação*

$$x + 11 = 10$$

nesta aritmética binária, usando as regras da aritmética. Observe, o inverso aditivo[5] *de 3 é 5... e que "coisas"como* -3 *ou* -5 *não existem na tabuada acima.*

4. <u>*O bit mais significativo*</u> *Seria difícil "ensinar" a um computador a fazer as contas da tabuada acima. É mais fácil complicar um pouquinho mais, devido a estrutura interna elétrica como funcionam os computadores, algo do tipo,* acender *ou* apagar[6] *uma luz. Como na nossa aritmética, os computadores precisam da mesma quantidade de elementos para representar os positivos e os negativos. Nós acrescentamos um sinal, "*$-$*", nos computadores se acrescenta mais um "bit",* 0 *para positivo e* 1 *para negativo. Este é o chamado* bit mais significativo, *é o último bit à esquerda.*

Assim, relativamente à taboada acima, 1111 *representa um* número negativo, *o inverso aditivo de* 0001, *que é positivo. Desta forma temos 15 números na aritmética:*

$$0111, 0110, 0101, 0100, 0011, 0010, 0001, 0000, \tag{4.10}$$

$$1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 \tag{4.11}$$

(a) <u>*regra dos sinais*</u> *Verifique que a regra para "trocar sinal" é:*

- *invertem-se todos os bits (onde tem zero, troca-se por um, onde tem um troca-se por zero);*
- *soma-se uma unidade.*

Por exemplo

$$-0011 = 1100 + 1 = 1101 \ ; \ 1101 = 0011 = 0000$$

a última casa que "sobra" é utilizada para inverter o bit mais significativo.

(b) *Construa a tabela da aritmética deste números e veja que ela é equivalente a tabela binária anterior.*

[5] de que 3 e de que 5 estamos falando ?

[6] este sistema de "acender ou apagar luzes" já está ultrapassado, mas o que existe é semelhante.

5. <u>*regra dos sinais*</u> *Analise a seguinte "demonstração" da regra para trocar sinal, e acrescente as justificativas que não colocamos.*
   - *Seja a um número binário e ã o binário recíproco obtida com a inversão dos bits;*
   - *então $a = \tilde{a} = 1$;*
   - *logo é preciso acrescentar uma unidade em algum deles para obter o* inverso aditivo *do outro.*

Ao final deste capítulo você pode ler um programa, feito em Python, para ensinar o computador a extensão da adição, da multiplicação e da desigualdade aos inteiros. O programa é na verdade uma "farsa" porque o computador já sabe o que lhe queremos ensinar e o próprio programa usa isto. Seria muito difícil construir corretamente (e logicamente) esta questão, mas serve para lhe dar uma idéia da "utilidade" deste aparato ló gico que estamos lhe propondo como aprendizagem.

4.2.3 Extensão do produto aos inteiros.

A extensão do produto aos inteiros é semelhante a que fizemos para estender a adição:

Definição 29 *Multiplicação de números inteiros.*
Exercício para o leitor.

4.2.4 Extensão da ordem aos inteiros.

Quando dois números são desiguais, existe uma diferença entre eles. Vamos usar este mé todo para decidir quem é o maior dos dois. Para isto precisamos estender a diferença ao conjunto dos números inteiros:

Definição 30 *de ordem em* $\mathbf{Z}$.
Dados $m, n \in \mathbf{Z}$ diremos que $m \leq n$ se, e somente se, $n - m \in \mathbf{N}$. Se $n - m \notin \mathbf{N}$ então diremos que $m > n$.

Deveriamos seguir a uma fastidiosa demonstração de que as propriedades seguintes da soma valem:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **27** *das propriedades de* $(\mathbf{Z}, +)$.

1. *A adição é comutativa.*
2. *A adição é associativa.*
3. <u>*existência do elemento neutro da adição*</u> *É o zero:* $0 + n = n$.
4. <u>*existência do inverso aditivo*</u>

$$\forall\ m\ \in \mathbf{Z}\ \exists n \in \mathbf{Z}\ ;\ m + n = o.$$

   O número n é designado por $-m$.

5. $\forall\ p \in \mathbf{Z}\ m \leq n \ \Rightarrow\ m + p \leq n + p$

Nós podemos encontrar estas mesmas propriedades em outros conjuntos munidos de outras operações. Vamos dar um exemplo simples.

Exemplo 30 *Estrutura algébricas das horas do relógio. Considere o conjunto*

$$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

das horas de um relógio. Sabemos somar horas, por exemplo:

$$7 + 5 = 12\ ;\ 6 + 7 = 1\ ;\quad ;\ 8 + 7 = 3.$$

Isto nos permite construir a seguinte taboada para adição:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Da taboada *podemos tirar alguma conclusões: 12 é o elemento neutro desta adição: se ele for somado a qualquer outra hora, reproduz a outra. Toda hora tem inverso aditivo:*

$$1 + 11 = 12\ ; 2 + 10 = 12\ ;\ \ldots 7 + 5 = 12 \ldots, 9 + 3 = 12 \ldots$$

A adição de horas é comutativa e associativa. Vemos assim que a estrutura algé brica de $(H, +)$ é idêntica a de $(\mathbf{Z}, +)$.

Temos exemplos *da mesma coisa*, cabe dar um nome comum a ambas.

Definição 31 *de grupo comutativo.*

Quando um conjunto com uma operação, (G, o) satisfizer as quatro propriedades

1. *o é comutativa.*
2. *o é associativa.*
3. *Existe um elemento neutro relativamente a o.*
4. *Todo elemento de G tem um inverso relativamente a o.*

diremos que (G, o) é um grupo comutativo.

Se a comutatividade não valer, diremos que é um grupo.

Num grupo podemos resolver qualquer equação[7]. Vejamos um exemplo de equação em $(H, +)$.

[7] não se engane, qualquer equação típica da estrutura.

Exemplo 31 *Equação no grupo das horas. Vamos resolver, usando as propriedades, a seguinte equação:*

$$7 + x = 3 \; ; \; 7, x, 3 \in H \; ;$$

$$\text{somando o inverso de 7 a ambos os membros:} \quad (4.12)$$
$$5 + (7 + x) = 5 + 3 \quad (4.13)$$
$$\text{aplicando a propriedade associativa:} \quad (4.14)$$
$$(5 + 7) + x = 5 + 3 \quad (4.15)$$
$$\text{simplificando:} \quad (4.16)$$
$$12 + x = 8 \quad (4.17)$$
$$\text{como 12 é o neutro:} \quad (4.18)$$
$$x = 8 \quad (4.19)$$
$$\text{De fato:} 7 + 8 = 3. \quad (4.20)$$

Esta é a lista das propriedades da multiplicação e da ordem nos inteiros.

Teorema **28** *das propriedades de* $(\mathbf{Z}, \cdot \geq)$.

1. *A multiplicação é comutativa.*
2. *A multiplicação é associativa.*
3. *Existe o elemento neutro para a multiplicação, o* 1.
4. *A multiplicação é distributiva relativamente à adição.*
5. $\forall a \in \mathbf{Z}$ $0 \;\; \mathrm{x} \;\; a = 0$, *e se* $a \;\; \mathrm{x} \;\; b = 0$ *então* $a = 0$ *ou* $b = 0$.
6. *Se* $p \geq 0$ $p \in \mathbf{Z}$ *então* $m \leq n \;\; \Rightarrow \;\; pm \leq pn$.
7. *Se* $p < 0$ $p \in \mathbf{Z}$ *então* $m \leq n \;\; \Rightarrow \;\; pm \geq pn$.

Devido a não existência de um inverso multiplicativo, $(Z, \cdot)$ não é um grupo. Isto nos vai conduzir à construçào dos números racionais para sanar esta "falha" dos inteiros.

As demonstrações de cada item dos dois teoremas é longa e se reveste de um aspecto de *inutilidade* porque todos sabemos que elas valem. Não é verdade que seja *inútil* fazer estas demonstrações, pelo contrário, somos forçados a fazê-las se quisermos construir a teoria corretamente. Entretanto todas elas se encontram feitas em uma grande maioria dos livros de Álgebra e você deve se acostumar à consulta no sentido de que não deve esperar que tudo esteja feito em único livro enciclopé dico. Também uma possibilidade importante é de que você mesmo se inicie na arte da demonstração. Vamos fazer algumas demonstrações dos itens listados nos dois teoremas para lhe mostrar o caminho.

4.2.5 Algumas demonstrações

Vamos voltar a usar a função "troca sinal" com o símbolo t.

Dem: Comutatividade da adição.
Queremos provar que $m, n \in \mathbf{Z} \;\; \Rightarrow \;\; m + n = n + m$. Existem quatro casos possíveis:

- $m, n \in \mathbf{N}$ e nada há o que demonstrar porque já admitimos tudo saber sobre $\mathbf{N}$.

- $m, n \in -\mathbf{N}$. Neste caso $m + n = t(t(m) + t(n))$, entretanto como $t(m), t(n) \in \mathbf{N}$ então $t(m) + t(n) = t(n) + t(m)$ logo

$$m + n = t(t(m) + t(n)) = t(t(n) + t(m)) = n + m$$

- $m \in \mathbf{N}$ e $n \in -\mathbf{N}$. Este é um dos casos em que os sinais dos números são diferentes. Há dois casos a considerar e na definição optamos por impôr a comutatividade na definição. Vamos evitar isto aqui.

  A regra para soma números inteiros, quando os sinais são diferentes, os separa em dois casos:

  1. Quando o número negativo tem maior módulo;
  2. quando o número negativo tem menor módulo.

  Observe que a separação entre os casos não menciona quem está åesquerda ou ådireita na expressão, quer dizer a regra supõe a comutatividade. Quer dizer, para somar m, n, se um for positivo e o outro negativo, tudo vamos observer é qual o sinal do maior e depois fazer a diferença entre os módulos deles segundo as regras da diferença em $\mathbf{N}$.

  Isto mostra que $m + n = n + m$ neste caso.

q.e.d .

Vamos demonstrar algumas das propriedades envolvendo a relação de ordem.

Dem: $\forall p \in Z \ ; \ m \leq n \quad \Rightarrow \quad m + p \leq n + p$..

Por definição, $m \leq n \equiv n \geq m \equiv n - m \in \mathbf{N}$ Se somarmos e subtrairmos p não iremos alterar a expressão:

$$n - m = (n + p) - (m + p) \in \mathbf{N}$$

logo, aplicando a definição ao segundo membro da igualdade temos:

$$n + p \geq m + p \equiv m + p \leq n + p$$

q.e.d .

Vejamos a demonstração da propriedade envolvendo a desigualdade e o produto:

Dem: Se p for positivo, então $n \geq m \quad \Rightarrow \quad pn \geq pm$.

Este resultado é consequência direta do seguinte (um lema):

Lema **1** *O produto de inteiros positivos é positivo.* **Dem**: *Está na própria definição do produto, veja o primeiro item.* **q.e.d .**

Agora, como p é positivo, então $p(n - m)$ é positivo, e pela distributividade do produto relativamente à soma, temos:

$$p(n - m) = pn - pm \in \mathbf{N} \equiv pn \geq pm$$

q.e.d .

Exercícios 20 *estruturas algébricas dos inteiros.*

1. *Resolva as seguintes equações, se forem possíveis, não sendo explique por que.*

   $3x + 7 = 10 \qquad 2x - 8 = 4x - 7 \qquad \frac{x+3}{7} = 2x + 1$

   $x - 4 = 2x + 5 \qquad x + \frac{3}{4} = 2 \qquad x - 3 = x + 3$

2. *Verifique as seguintes desigualdades.*

   $3x - 7 < 10 \qquad 2x - 8 < 4x - 7 \qquad \frac{x+3}{7} \leq 2x + 1$

   $x - 4 \leq 2x + 5 \qquad x + \frac{3}{4} = 2 \qquad 2x - 3 \geq x + 3$

3. *Faça uma lista completa das propriedades de $(Z, +, \cdot, \geq)$. Use a estrutura de grupo para simplificar a listagem.*

4.3 O conjunto dos números racionais.

> Na escala da evolução do pensamento chegou um momento em que haviam quantidades que não eram inteiras *relativamente a outras.* Por exemplo, veja as medidas padronizadas, todas elas foram e serão convenções, o *pé do rei*, o metro inventando pela Revolução Francesa para encerrar a história real e abrir uma era brilhante de império do direito de todos inclusive nas ciências. Ingleses e americanos, numa atitude arrogante, continuam usando as velhas medidas, pé, milha, etc...
> Mas quando se for medir a altura de uma pessoa, será raro encontrar quem meça *um metro* ou *dois metros*.
>
> O comum será encontrar quem meça *um metro e um pouquinho de metro*, por exemplo $1m + \frac{1}{2}m$. Chegamos assim aos nú meros racionais como uma necessidade da evoulução dos conhecimentos humanos, mas vamos retornar ao trabalho algébrico e discutir a invenção dos racionais para resolver equações.

4.3.1 Incompletitude algébrica de Z.

Na seção anterior definimos grupo e verificamos que $(\mathbf{Z}, \cdot)$ não era um grupo porque lhe faltava o inverso multiplicativo. Foi esta a razão que nos levou construir **Z** a partir de **N**, porque $(N, +)$ não era um grupo. Faremos o mesmo agora, construindo um novo conjunto em que “todos” os seus elementos tenham inverso multiplicativo. O método poderia ser inteiramente algébrico para depois descobrirmos uma forma adequada para estes novos elementos, mas com isto perderiamos o tempo que a Humanidade já ganhou, vamos logo descrever aquilo que já sabemos com um leve disfarce de “descoberta”.

Queremos que a equação

$$ax = 1$$

tenha sempre solução, para todo $a \in \mathbf{Z}$. A solução para este problema tem que ser “inventada” pois na época em que haviam apenas os inteiros este problema era “impossível”.

Existe um elemento de **Z** para o qual isto não será possível, até mesmo porque precisamos que este elemento tenha propriedades diferentes, o zero, para o qual desejamos a propriedade:

$$(\forall\ a \in \mathbf{Z})\ (a \cdot 0 = 0).$$

Esta será uma exceção[8] a regra.

A solução que aos poucos se cristalizou foi a de caracterizar o número x com o formato de “fração”:

$$x = \frac{1}{a}.$$

Observe que temos uma invenção, se convencionou que o novo objeto que tornaria a equação $ax = 1$ possível seria $x = \frac{1}{a}$. Desta forma acrescentamos ao conjunto **Z** os novos objetos:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} \bigcup \{\dots, \frac{1}{3}, \ \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{-1} \frac{1}{-2}, \frac{1}{-3}, \frac{1}{-4} \dots\} \tag{4.21}$$

e como anteriormente, a primeira preocupação seria definir no novo conjunto as operações de *adição* e *multiplicação* para testar a nova estrutura algébrica e sua compatibilidade com as anteriores, de $\mathbf{Z}, \mathbf{N}$.

Um belo trabalho algébrico, *você está convidado a experimentá-lo*, pode conduzir à solução que já conhecemos, vamos resumir o processo usando a experiência acumulada.

---

[8] quem foi que disse que em Matemática não existem exceções...

Ao tentar somar “números” como $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ se notou que este formato era insuficiente, seria necessário um formato mais “complicado” que é $\frac{m}{n}$. Assim se definiu

$$\mathbf{Q} = \{x \ ; \ x = \frac{p}{q} \ ; \ p, q \in \mathbf{Z} \ ; q \neq 0\} \tag{4.22}$$

As figuras (fig. 4.1), página 105 mostram duas frações equivalentes.

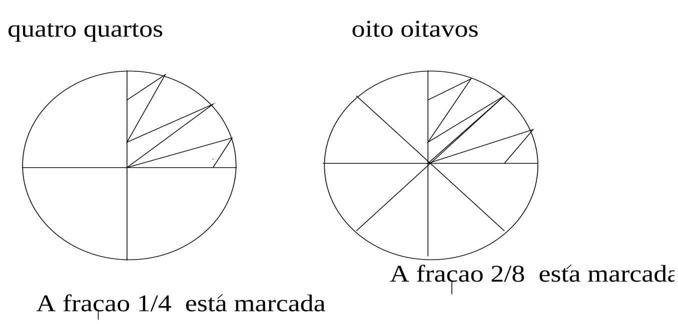

Figura 4.1: Frações equivalentes com denominadores diferentes $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

Abaixo vamos redefinir o conjunto **Q** em forma definitiva, a presente definição é provisória, é a que se encontra na maior dos livros, veremos que há outra melhor.

Observação 16 *A função do numerador e do denominador. Como já haviamos antecipado antes quando falamos de produto cartesiano, e de par ordenado, um número racional é um par ordenado de inteiros. É ordenado porque ele é formado de* numerador *e de* denominador *que não podem ser trocados. Numa fração, o numerador* *representa uma multiplicação, enquanto que o denominador representa uma divisão, uma invenção anônima de extraordiná rio poder prático e teórico.*

A figura (fig. 4.2) na página 107, mostra como se podem representar os números racionais na reta, sobretudo mostra como podemos representar as frações $\frac{p}{q}$ dado q, que no caso da figura $q = 7$.

4.3.2 Estensão da álgebra dos inteiros aos racionais

Está na hora de definirmos em $\mathbf{Q}$ as duas[9] operações básicas: adição e multiplicação.

Definição 32 *da adição em* $\mathbf{Q}$.
Dadas duas frações, $\frac{p}{q}, \frac{n}{m}$ *definimos*

$$\frac{p}{q} + \frac{n}{m} = \frac{pm + qn}{mq}$$

isto é, no denominador o produto dos denominadores, no numerador a soma dos produtos em cruz do numerador de uma com o denominador da outra.

Observação 17 *Inutilidade do m.m.c A definição clássica que passa pelo "m.m.c." dos denominadores produz um resultado otimizado, comparado com esta, e nós voltaremos a este assunto posteriormente. Entretanto a definição acima mostra a inutilidade do uso do "m.m.c".*

Podemos chegar facilmente a regra de multiplicar usando um método intuitivo: a multiplicação *tem que ser* compatível com o que já foi feito anteriormente, *uma soma repetida*. Queremos então que $2 \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q}$. Se aplicarmos a regra operatória da soma teremos

$$2 \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} = \frac{q+q}{q^2} == \frac{2q}{q^2}$$

como já observamos, o numerador representa uma multiplicação, neste caso uma multiplicação por $2q$ e o denominador representa uma divisão, neste caso por $q \cdot q$.

Quer dizer que há uma multiplicação e uma divisão por q que se auto-eliminam, podemos assim cancelar q no numerador e no denominador:

$$2 \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} = \frac{q+q}{q^2} == \frac{2q}{q^2} = \frac{2}{q}$$

Poderiamos repetir este processo com $3 \cdot \frac{1}{q}$ ou diretamente com $p \cdot \frac{1}{q}$ para concluirmos que regra de multiplicar por inteiros deverá ser $p \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q}$.

Se quisermos multiplicar $\frac{1}{m}, \frac{1}{q}$ devemos pensar no papel que têm *numerador e denominador*.

O número inteiro m está dividindo, se multiplicarmos as duas frações será natural que m venha a multiplicar q para reforçar a função que este último exerce:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{mq}.$$

Juntando estas idéias vem a definição de multiplicação de frações:

[9]todo mundo fala em quatro operações, mas só existem duas...

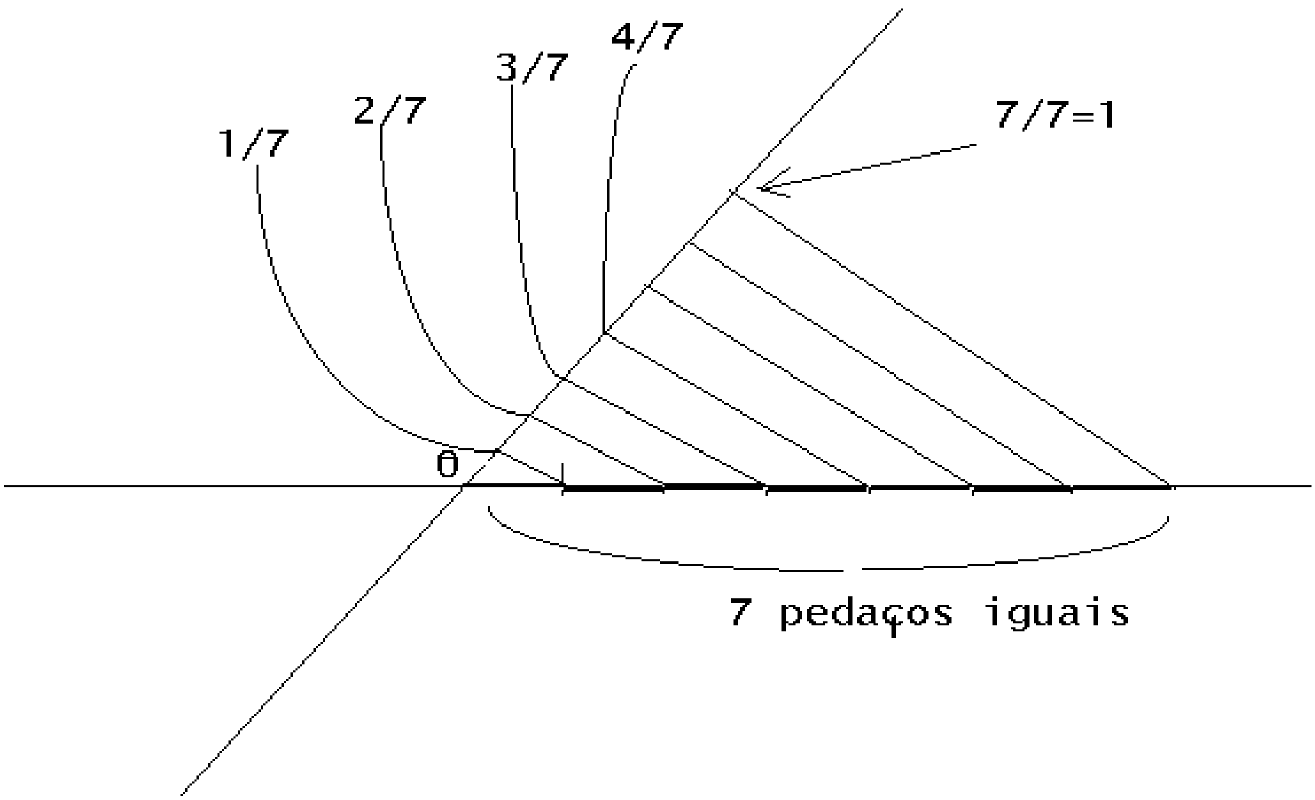

Figura 4.2: Racionais e inteiros

Definição 33 *de multiplicação de frações.*

Dadas duas frações, $\frac{n}{m}, \frac{p}{q}$ *definiremos*

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{np}{mq}$$

isto é, para multiplicar frações, multiplicamos seus numeradores e denominadores entre si.

Verifique que os exemplo anteriores se enquadram nesta definição:

$$2\frac{1}{q} = \frac{2}{1}\frac{1}{q} = \frac{2}{q} \ ; \ p\frac{1}{q} = \frac{p}{1}\frac{1}{q} = \frac{p}{q}$$

Exercício 13 *Operações aritméticas em* $\mathbf{Q}$.

1. *numerador multiplica, denominador divide Considere a fração* $\frac{3}{5}$. *Se multiplicarmos numerador e denominador pelo mesmo número a teremos:* $\frac{3a}{5a}$ *que é uma fração equivalente a* $\frac{3}{5}$. *Esta afirmação ainda vale para* $a = 0$ *?*
2. *numerador multiplica, denominador divide Verifique quais das afir-mações é verdadeira, e justifique porque:*
   - $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$
   - $\frac{3}{7} = \frac{5}{9}$
   - $\frac{1}{7} < \frac{3}{7}$
   - $\frac{3}{7} > \frac{3}{5}$

   Rigorosamente falando não podiamos incluir aqui desigualdades, elas ainda não foram definidas.
3. *Queremos somar as duas frações* $\frac{3}{7}, \frac{6}{8}$. *Justifique as seguintes operações que alteram uma linha ao passar para seguinte:*

$$\frac{3}{6} + \frac{6}{8}$$
$$\frac{3}{6} + \frac{6\cdot 6}{6\cdot 8}$$
$$\frac{8\cdot 3}{8\cdot 6} + \frac{6\cdot 6}{6\cdot 8}$$
$$\frac{24}{48} + \frac{36}{48} = \frac{60}{48}$$
$$\frac{3}{6} + \frac{6}{8} = \frac{60}{48} = \frac{5\cdot 12}{4\cdot 12} = \frac{5}{4}$$

4.3.3 Compatibilidade dos inteiros com os racionais.

As definições que fizemos da adição e da multiplicação de nada adiantariam se os seguintes fatos não fossem resguardados:

1. as propriedades que a adição e a multiplicação têm nos inteiros.
2. coïncidência com a multiplicação e adição dos inteiros.

Na verdade uma pergunta se impõe: inteiros são também frações?

Este é nosso programa imediato, verificar que as operações com os inteiros são as mesmas que acabamos de definir, na verdade começaremos mostrando que *de certa forma* $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Vamos começar mostrando que *de certa forma* os inteiros são um subconjunto dos racionais.

Formalmente não são, uma vez que um nú mero racional é um par ordenado de números inteiros. O que acontece é que podemos encontrar dentro deste conjunto de pares ordenados uma imagem de $\mathbf{Z}$ obtida por uma `bijeção` e como já vimos, as bijeções identificam as imagens de uma tal forma que não precisamos mais ver "diferenças" entre elas.

Observação 18 *Diferença entre frações*
Vamos definir a diferença *entre frações.*

O hábito nos indica que a diferença é uma soma em que um dos termos tem o "sinal trocado". Claro, aqui mais um problema de lógica, o que significa trocar o sinal em $\mathbf{Q}$ *?*

Vamos definir

$$\mathbf{Q} \to \mathbf{Q} \ ; \ x = \frac{p}{q} \mapsto -x = \frac{-p}{q}$$

que a troca de sinal de uma fração se dá pela troca de sinal do numerador da mesma.

Agora podemos calcular a diferença entre $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ *:*

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m}{n} + \frac{-p}{q} = \frac{mq - np}{nq}.$$

Mas, o que seria `zero` *em* $\mathbf{Q}$ *?*

Por definição, zero *é o número que somado a qualquer "outro" reproduz o "outro", o elemento neutro da adição. A fração* $\frac{0}{1}$ *tem esta propriedade:*

$$\frac{0}{1} + \frac{p}{q} = \frac{0 \cdot q + 1 \cdot p}{1 \cdot q} = \frac{p}{q}.$$

Teorema **29** *da imagem de* $\mathbf{Z}$ *em* $\mathbf{Q}$.
A função $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \ ; \ m \mapsto \frac{m}{1}$ *é injetiva.*

Dem :

Basta verificarmos se m, m' *forem diferentes, então* $\frac{m}{1}, \frac{m'}{1}$ *serão diferentes.*

Ora, como os inteiros m, m' *são diferentes por hipótese, então* $m - m' \neq 0$ *e portanto* $\frac{m-m'}{1} \neq \frac{0}{1}$ *o que nos leva a concluir que se* $m \neq m'$ *então a imagem destes inteiros dentro de* $\frac{m}{1}, \frac{m'}{1}$ *são dois números racionais diferentes.*

A função construida é injetiva. Como não é bijetiva, então podemos dizer:

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}. \tag{4.23}$$

q.e.d .

Observe você a razão da expressão "*certa forma*" quando dissemos que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. De agora em diante riscaremos esta forma de falar do nosso texto, diremos simplesmente que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Somando agora dois inteiros sob a forma de fração para verificar que o resultado é o mesmo que a soma de inteiros:

$$\mathbf{Z} \ \text{x} \ \mathbf{Z} \ni (n, m) \mapsto \frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n+m}{1} \mapsto n + m \in \mathbf{Z}$$

mostra que tanto faz *somarmos em* $\mathbf{Z}$ e depois transferirmos para $\mathbf{Q}$ quanto somarmos diretamente em $\mathbf{Q}$ as imagens dos inteiros.

Da mesma forma para a multiplicação:

$$\mathbf{Z} \ \text{x} \ \mathbf{Z} \ni (n, m) \mapsto \frac{n}{1}\frac{m}{1} = \frac{nm}{1} \mapsto nm \in \mathbf{Z}$$

mostrando que a multiplicação *entre as imagens dos inteiros* em $\mathbf{Q}$ coïncide com a *imagem dos inteiros multiplicados.*

Com isto provamos o teorema:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **30** *da compatibilidade das operações com os inteiros.*

A adição e a multiplicação de números racionais é compatível com estas operações sobre os inteiros.

Na verdade deveriamos mostrar um teorema equivalente ao que demonstramos para os inteiros. Não iremos demonstrar os teoremas, como no caso dos inteiros, vamos enunciá-los e fazer algumas demonstrações com o intúito de sugerir que você mesmo as faça como exercício.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **31** *das propriedades de* $(\mathbf{Q}, +)$.

1. *A adição é comutativa.*
2. *A adição é associativa.*
3. *existência do elemento neutro da adição* *É o zero:* $\frac{0}{1} + \frac{n}{m} = \frac{n}{m}$.
4. *existência do inverso aditivo*

$$(\forall \ \frac{n}{m} \ \in \mathbf{Q}) \ (\exists x \in \mathbf{Q} \ ) \ (\frac{n}{m} + x = 0).$$

   O número x é designado por $\frac{-n}{m}$. *Em suma ele é obtido por* troca de sinal, *vemos que as coisas se encaixam.*

5. $(\forall \ p, a, b \in \mathbf{Q}) \ (a \leq b \ \ \Rightarrow \ \ a + p \leq b + p)$

Observação 19 *Um erro lógico !*

Se tentarmos demonstrar a última propriedade no teorema acima, veremos que não foi definida a desigualdade em $\mathbf{Q}$.

Precisamos saber quando $\frac{a}{b} \geq \frac{p}{q}$.

Vamos usar o método dos inteiros:

$$\frac{a}{b} \geq \frac{p}{q} \equiv \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \geq 0$$
$$\frac{a}{b} \geq \frac{p}{q} \equiv \frac{aq-pb}{bq} \geq 0$$
$$\frac{a}{b} \geq \frac{p}{q} \equiv aq - pb \geq 0$$
$$\frac{a}{b} \geq \frac{p}{q} \equiv aq \geq pb$$

A última expressão é significativa, $aq \geq pb$ *é uma DESPROPORçÃO. Se tivessemos* $aq = pb$ *diriamos que* $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ *seria uma proporção. Logo as frações* $\frac{a}{b} \geq \frac{p}{q}$ *não formam uma proporção mas a lei das proporções "produto dos extremos é menor do que o produto dos meios" caracteriza quando* $\frac{a}{b} \geq \frac{p}{q}$

Vamos corrigir o erro lógico definindo a desigualdade em $\mathbf{Q}$.

Definição 34 *Desigualdade em* $\mathbf{Q}$

$\frac{a}{b} \geq \frac{p}{q} \equiv aq \geq pb$

e o teorema sobre a estrutura multiplicativa de $\mathbf{Q}$.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **32** *das propriedades de* $(\mathbf{Q}, \cdot)$.

1. *A multiplicação é comutativa.*
2. *A multiplicação é associativa.*
3. *Existe o elemento neutro para a multiplicação, o* $\frac{1}{1}$.
4. *Para todo* $a \in \mathbf{Q}$; $a \neq 0$ *existe um número racional* b *tal que* $ab = ba = 1 = \frac{1}{1}$. *Isto é todo número racional diferente de zero tem inverso multiplicativo.*

Com estes dois teoremas vemos uma diferença substancial entre $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$. O conjunto dos números racionais é um grupo tanto com a adição como relativamente multiplicação, desde que tiremos o zero no último caso. Dizemos isto assim:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **33** *do grupo comutativo* $(\mathbf{Q}, +)$.
O conjunto dos números racionais com a adição é um grupo comutativo.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **34** *do grupo comutativo* $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$.
O conjunto dos números racionais sem o zero, Q^*, *com a multiplicação é um grupo comutativo.*

Da mesma forma que com os inteiros, existem algumas propriedades que ligam a adição e a multiplicação:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **35** *das propriedades que ligam o grupo aditivo e o multiplicativo*

1. *O produto de números racionais é distributivo relativamente åsoma.*
2. $$\forall a \in \mathbf{Q}) \ (0 \ \text{ x } \ a = 0),$$
   $$e \ se \ a \ \text{ x } \ b = 0 \ então \ a = 0 \ ou \ b = 0.$$
3. $$\forall \ p, m, n \ ; p \geq 0 \ ; \ p, m, n \in \mathbf{Q} \ ;$$
   $$m \leq n \quad \Rightarrow \quad pm \leq pn.$$
   $$Se \ p < 0 \ então \ m \leq n \quad \Rightarrow \quad pm \geq pn.$$

A última propriedade liga a estrutura de ordem $(\mathbf{Q}, +, \leq)$ com a o grupo multiplicativo.

Quando todas estas propriedades forem verdadeiras, temos uma nova estrutura algébrica chamada `corpo ordenado`.Quer dizer que

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **36** *O conjunto* $\mathbf{Q}$ *dos números racionais, é um corpo ordenado.*

4.3.4 Algumas demonstrações

Como já observamos no caso dos inteiros, deveriamos fazer demonstrações cuidados de todas as propriedades dos racionais. Novamente vale a mesma observação. Estas demonstrações existem feitas em diversos locais e seria um desperdício de tempo e de inteligência simplesmente repetí-las. Vamos, entretanto, fazer algumas delas com o intúito de apoiar sua iniciativa para que você tente fazer as demais como exercício.

Escolhemos para fazer a demonstração algumas que vão conduzir a algumas topadas lógicas cujos comentários completarão a teoria. É uma forma didática de construir uma teoria, mostrando quando e onde são necessários os teoremas. É també m uma forma muito longa[10]

Teorema **37** *A adição é associativa.*

Dem :
Queremos provar que, dados tres números racionais, $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}, \frac{n}{m}$ é verdade que

$$\frac{a}{b} + (\frac{p}{q} + \frac{n}{m}) = (\frac{a}{b} + \frac{p}{q}) + \frac{n}{m}$$

A soma dos termos no primeiro membro é:

$$\frac{a}{b} + \frac{pm + qn}{qm} = \frac{b(pm + qn) + aqm}{bqm} = \frac{amq + bmp + bnq}{bmq}$$

que é exatamente o que se obtém somando os termos do segundo membro. **q.e.d .**

Teorema **38** *Existência do elemento neutro relativamente à soma*

Dem :
Buscamos uma fração $\frac{n}{m}$ que somada a qualquer outra $\frac{p}{q}$ reproduza esta última:

$$\frac{p}{q} + \frac{n}{m} = \frac{p}{q}$$
$$\frac{p}{q} + \frac{n}{m} = \frac{pm+qn}{qm} = \frac{p}{q}$$
$$\frac{p}{q} + \frac{n}{m} = \frac{pm+qn}{qm} = \frac{pm}{qm} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad pm + nq = pm \quad \Rightarrow \quad nq = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 0$$

Analisando as contas e suas transformações lógicas, da primeira para segunda linha acrescentamos a expressão da soma das duas frações impondo que fosse igual à fração que esperamos encontrar.

Da segunda para terceira linha alteramos a expressão da fração $\frac{p}{q}$ incluindo nela o número inteiro m multiplicando e dividindo, quer dizer, sem alterá-la. Observe observação anterior a respeito, procure numerador, denominador *no índice remissivo. Na última linha conluimos o que era possivel da igualdade entre dois pares ordenados: as coordenadas do mesmo tipo dos pares tem que ser iguais: numeradores e denominadores iguais entre si. A conclusão é que $qn = 0$ e como q não pode ser zero, porque é um denominador, tem que ser $n = 0$.*

A conclusão desagradável é de que não existe um único elemento neutro relativamente à soma. Qualquer fração da forma $\frac{0}{m}$ somada a outra *fração, reproduz a* outra. **q.e.d .**

Conclusão desagradável na demonstração anterior porque esperamos unicidade do elemento neutro. Vamos voltar a discutir esta questão ao final.

---

[10] é a acusação principal que se faz a Gauss, ele publicou todos os seus trabalhos na forma final, como ele mesmo disse, "todo construtor cuidadosamente retira os andaimes quando a construção termina...",ver [1].

Teorema **39** *Existência do inverso aditivo.*

Dem :

Queremos provar que para toda fração $\frac{p}{q}$ *existe uma outra fração* x *tal que* $\frac{p}{q} + x = 0$. *Vamso agir "algebricamente", seja* $x = \frac{n}{m}$ *a possível fração:*

$$\frac{p}{q} + \frac{n}{m} = 0$$
$$\frac{p}{q} + \frac{n}{m} = \frac{pm+qn}{qm} = 0 = \frac{0}{mq}$$

em que usamos $\frac{0}{mq}$ *para representar o zero, porque já vimos que qualquer fração que tenha 0 no númerador* representa *o zero. A escolha* <u>*exatamente*</u> *é ardilosa*[11]*. A conclusão da última igualdade é que* $pm + nq = 0$ *"passando para o segundo*[12] *membro"* pm *nos leva a*

$$nq = -pm$$
$$\frac{n}{m} = \frac{-p}{q}$$

da primeira para segunda linha, dividimos ambos os números inteiros pelo inteiro mq *construindo a igualdade entre duas frações que nos levou a forma da fração* $\frac{n}{m}$ *procurada.*

Se você quiser, podemos justificar a passagem da primeira para a segunda linha interpretando $nq = -pm$ *como "produdo dos extremos é igual ao produto dos meios numa proporção" então na segunda linha está a proporção correspondente.*

Vemos que, para obter o inverso aditivo de $\frac{p}{q}$*, basta trocar-lhe o sinal: inverso aditivo de* $\frac{p}{q}$ *é* $\frac{-p}{q}$*. Poranto existe para todo número racional um inverso aditivo.* **q.e.d .**

Teorema **40** *Desiguldade e produto*

$$\forall\ a, b, c\ ; c \geq 0\ ;\ a, b, c \in \mathbf{Q}\ ;$$
$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad ac \leq bc.$$
$$Se\ c < 0\ então\ a \leq b \quad \Rightarrow \quad ac \geq bc.$$

Dem :

Observação 20 *O conjunto dos racionais positivos*

Definimos a ordem em $\mathbf{Q}$ *mas é preciso aprofudar esta questão. Por exemplo, dadas duas fraçõe* x, y *sabemos que* $x \geq y$ *se, e somente se,* $x - y \in \mathbf{Q}^+$ *o conjunto dos números racionais positivos.*

O problema persiste... "que é o conjunto dos números racionais positivos?"

Para entender melhor a definição, vejamos alguns exemplos. Se uma fração tiver numerador e denominador positivos, é razoável pensar nela como um número positivo, porque para encontrar o seu inverso aditivo teriamos que trocar o sinal do numerador.

Podemos então redefinir $\mathbf{Q}$:

Definição 35 *de* $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{Q} = \{x\ ;\ x = \frac{p}{q}\ ;\ p \in \mathbf{Z}\ ; q \in \mathbf{N}^*\}$$

quer dizer que só vamos admitir frações com denominador positivo.

Um fração como $\frac{3}{-4}$ *será "corrigida" para* $\frac{-3}{4}$.

Na última seção vamos discutir esta pluralidade de números racionais e como entendê-la.

Assim podemos finalmente particionar $\mathbf{Q}$ *em dois conjuntos, ou "quase-particionar" como já fizemos com os inteiros:* $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \bigcup \mathbf{Q}^+$.

---

[11] são tais ardíis que se explicam na frase de Gauss já citada, tiramos os andaimes ao termino da construção.

[12] a maneira correta de falar é, somando $-pm$ a ambos os membros...

O conjunto $\mathbf{Q}^-$ consiste de todas as frações cuja numerador seja negativo, é o conjunto dos números racionais negativos.

$$\mathbf{Q} = \{x \ ; \ x = \frac{p}{q} \ ; \ p \in -\mathbf{N} \ ; q \in \mathbf{N}^*\}$$

O conjunto $\mathbf{Q}^+$ é o conjunto de todas as frações cujo numerador seja positivo, é o conjunto dos racionais positivos.

$$\mathbf{Q} = \{x \ ; \ x = \frac{p}{q} \ ; \ p \in \mathbf{N} \ ; q \in \mathbf{N}^*\}$$

Zero é um elemento comum aos dois conjuntos, porisso dissemos que tinhamos "quase-particionado" $\mathbf{Q}$.

Da mesma forma como para os inteiros, este teorema é consequência direta de um teorema mais simples, (um lema):

$\boxed{\text{Lema}}$ 2 *O produto de números racionais positivos, é positivo.*

$\boxed{\textbf{Dem}}$*: Tomemos dois números racionais positivos, quer dizer duas frações* $\frac{p}{q}, \frac{n}{m}$ *com , $p, n \geq 0$, de acordo com a nova definição de* $\mathbf{Q}$. *Calculando-lhes o produto temos:*

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} = \frac{pn}{mq}.$$

Como p, n são positivos, o produtos destes dois inteiros positivos é também positivo: $pn \geq 0$ e logo

$$\frac{pn}{mq} \geq 0$$

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Como $a \leq b \equiv b \geq a$ então $b - a \geq 0$, pelo lema

$$c(b - a) = bc - ac \geq 0 \equiv bc \geq ac \equiv ac \leq bc,$$

como queriamos demonstrar.

Se, por outro lado, $c < 0$ então o seu produto com qualquer racional positivo resulta num racional negativo, logo

$$c(b - a) = bc - ac \leq 0 \equiv bc \leq ac \equiv ac \geq bc,$$

como queriamos demonstrar. $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **41** *Existência do inverso multiplicativo*

Todo número racional diferente de zero tem inverso multiplicativo.

$\boxed{\textbf{Dem}}$*:*

Tome um número racional, $\frac{p}{q}$. Novamente vamos supor que a afirmação é verdadeira e vamos calcular o valor do número racional $\frac{x}{y}$ tal que

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{x}{y} = 1 = \frac{1}{1}$$

Efetuando as contas:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{x}{y} = \frac{px}{qy} = \frac{1}{1} = \frac{qy}{qy} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad px = qy \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{q}{p}$$

estas contas não são vá lidas se $p = 0$ que está excluido por hipótese.

Assim o inverso de $\frac{p}{q}$ é $\frac{q}{p}$.

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

4.3.5 Classes de equivalência de frações.

Um dos "problemas" que encontramos em nossos cálculos anteriores foi o da falta de *unicidade*, por exemplo no caso do elemento neutro da soma em que qualquer fração com numerador 0 é elemento neutro para soma. Quer dizer que há muitos zeros.

A forma de resolver este problema vem sob a forma de `relação de equivalê ncia`. Esta forma de equivalência é a velha lei das proporções agora aqui com nova roupagem:

Definição 36 *Equivalência entre frações.*
Diremos que duas frações são equivalentes, quando, colocadas como proporções, o produto dos meios for igual ao produto dos extremos:

$$\frac{p}{q} \equiv \frac{n}{m} \quad \textit{se, e somente se,} \quad pm = qn.$$

E agora vamos a última, e **definitiva**, definição do conjunto dos números racionais:

Definição 37 *do conjunto dos números racionais.*
Seja

$$\mathcal{F} = \{\frac{p}{q} \ ; \ p \in \mathbf{Z} \ e \ \ q \in \mathbf{N}^*\},$$

$\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as frações que anteriormente chamamos de $\mathbf{Q}$, e considere em $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ o conjunto das classes de equivalências induzidas pela `lei das proporções`*, quer dizer que cada uma das classes de equivalên-cia é formada exclusivamente por frações que formem proporções. Este conjunto é $\mathbf{Q}$, o conjunto dos números racionais.*

E agora a "*coisa*" se complicou, o capítulo tem começar todo de novo: *definir as operações de adição e multiplicação para este novo conjunto, definir uma ordem, e voltar a provar os teoremas...*

Mas, vamos preferir deixar isto como exercício para o leitor... O próximo bloco de exercícios sugere estas demonstrações, nele faremos um tipo de representação geométrica para o conjuntos dos números racionais, baseada na proporcionalidade existente em cada classe de equivalência. No final deste capítulo veremos outra interpretação geomé-trica que irá abrir espaço para construirmos o conjunto dos números reais.

Exercício 14 *Interpretações geométricas de $\mathbf{Q}$.*

1. *Mostre que se duas frações, $\frac{a}{b}$ e $\frac{n}{m}$ forem equivalentes, então:*

$$\frac{n}{m} + \frac{p}{q} \equiv \frac{a}{b} + \frac{p}{q}$$

2. *Mostre que se duas frações, $\frac{a}{b}$ e $\frac{n}{m}$ forem equivalentes, então:*

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} \equiv \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q}$$

   qualquer que seja a outra fração $\frac{p}{q}$.

3. *Faça o gráfico do produto cartesiano $\mathbf{Z} \ \text{x} \ \mathbf{N}^*$.*
   (a) *Verifique que $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \equiv (p,q) \in \mathbf{Z} \ \text{x} \ \mathbf{N}^*$.*
   (b) *Represente a fração $\frac{1}{3}$ como o ponto $(1,3)$. Escolha algumas frações equiva-lentes a ela, faça coorespondente representação gráfica. Qual a conclusão geométrica?*

(c) *Represente a fração $\frac{2}{5}$ como o ponto $(2, 5)$. Escolha algumas frações equivalentes a ela, faça coorespondente representação gráfica. Qual a conclusão geométrica?*

(d) *Faça a demonstração de que a conclusão geométrica sugerida nos itens anteriores vale sempre.*

4. *Verifique se é verdade:* As classes de equivalência que formam **Q** se encontram sobre as "semi-retas" que partem da origem e passam por uma "representação" qualquer de um elemento*:*

$$\mathbf{Q} \ni \frac{a}{b} \mapsto (a, b) \in \mathbf{Z} \ \text{ x } \ \mathbf{N}^*$$

a classe de $\frac{a}{b}$ se encontra na reta que passa na origem e pelo ponto (a, b).

5. *módulo e classe de equivalência.*

(a) *Dentro do espirito da questão anterior, determine a reta que contem a classe do* 1.

(b) *Ainda dentro do mesmo espirito geométrico, determine a reta que contem a classe do* 2.

(c) *Ainda dentro do mesmo espirito geométrico, determine a reta que contem a classe do $\frac{1}{2}$.*

(d) *Determine a reta que contem a classe do $\frac{1}{3}$.*

(e) *Determine a reta que contem a classe do $\frac{1}{4}$.*

(f) *Determine a reta que contem a classe do $\frac{-1}{2}$.*

(g) *Determine a reta que contem a classe do -2.*

(h) *Determine a reta que contem a classe do -3.*

(i) *De todas estas experiências deduza uma regra geral que associe* sinal *e* módulo *sobre a localização geométrica das classes de equivalência de números racionais*

Observação 21 *Comentários sobre os exercícios.*

1.

$$\frac{n}{m} + \frac{p}{q} = \frac{nq+mp}{qm}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq+bp}{bq}$$
$$(nq + mp)bq = (aq + bp)qm$$
$$nbq^2 + bmpq = amq^2 + bmpq$$
$$nbq^2 = amq^2$$
$$nb = am \text{ equivale à hipótese } \frac{a}{b} \equiv \frac{n}{m}$$

Conclusão a adição que definimos no velho **Q** *é a mesma que para o* novíssimo **Q** *das classes de equivalência.*

2.

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{np}{mq}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{ap}{bq}$$
$$npbq = apmq \equiv nb = am \text{ equivale à hipótese } \frac{a}{b} \equiv \frac{n}{m}$$

3. *Se duas frações $\frac{a}{b}, \frac{x}{y}$ forem equivalentes então $ay = bx \equiv y = \frac{b}{a}x$ quer dizer "qualquer que seja $\frac{x}{y}$ o numerado e o denominador estarão sempre na mesma proporção". Se representarmos $\frac{x}{y}$ como o ponto (x, y) no plano, eles serão catetos de triâ ngulos retângulos semelhantes, logo as hipotenusas ficarão sempre sobre a mesma reta. Quer dizer, (x, y) estará sobre a reta determinada por (a,b), é o que as experiências sugeriram. De fato, a classe de $\frac{a}{b}$ se encontra na reta que passa na origem e pelo ponto (a, b). Observe que a "primeira coordenada" do par ordenado $\frac{a}{b}$ é a.*
4. *Conclusão geométrica sob a localização das classes de equivalência das frações:*
   - *As classes de equivalência que comtém as frações negativas, são as semi-retas contidas no* quarto quadrante.
   - *Se uma classe de equivalência contiver frações de módulo menor que* 1*, "frações próprias", então ela contém as frações*

     $$\frac{a}{b} \equiv (a, b) \ ; \ a < b$$

     então os pontos (a, b) se encontra em uma reta acima da primeira bissetriz.
   - *A classe do* 1 *é primeira bissetriz.*
   - *A classe do* -1 *é segunda bissetriz, é a semi-reta que passa na origem e pelo ponto $(1, -1)$, no quarto quadrante.*
   - *Se uma fração tiver módulo maior que* 1, for uma fração imprópria*, sua classe de equivalência será uma semi-reta entre as duas bissetrizes.*
   - *A classe das frações nulas, convenientemente, está sobre o eixo OY.*
   - *<u>curiosidade...</u> O eixo OX não contém frações, por que?*

4.3.6 O m.m.c. e a soma de frações.

Um denominador comum entre duas frações podem ser vários. Já vimos anteriormente que uma forma de encontrar um denominador comum, seria considerar o produto dos denominadores.

O produto de dois nú meros é um múltiplo comum a ambos.

O m.m.c entre dois nú meros é o *"menor" múltiplo comum entre estes números.* Vamos considerar duas frações, $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}$.

Para somar estas frações, podemos simplesmente construir duas frações equivalentes a estas com denominador bq. Depois vamos escrever

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq + bp}{bq}.$$

Em vez de escolhermos bq vamos escolher um múltimo comum que seja menor que bq, se houver. Vamos chamá-lo m e estamos querendo dizer que:

$$m = bc \ ; m = qc'$$

e os dois fatores c, c' não precisam ser iguais. A gora a soma de frações fica:

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{ac}{bc} + \frac{pc'}{qc'} =$$
$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{ac}{m} + \frac{pc'}{m} =$$
$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{ac+pc'}{m}$$

Esta é expressão mais simples da soma se não houver fator comum entre a, p, m.

Entretanto é bom salientar a completa inutilidade do cálculo do m.m.c. para somar frações.

4.4 Outra interpretação geométrica de Q e dos números reais.

Mostraremos que o conjunto dos números racionais tem um comportamento geométrico. Embora ele venha de uma extensão algébrica de **Z** e guarde muita semelhança ainda com este conjunto, ele já contém a semente de um conjunto mais avançado, *o conjunto dos números reais.*
A completação que faremos de **Q** para chegar ao conjunto **R** dos números reais será de natureza geométrica, em oposição as passagens que construimos

$$\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{R}$$

4.4.1 A reta e os racionais.

Os números racionais têm uma propriedade que os faz fundamentalmente diferentes dos inteiros:

entre dois nú meros racionais, tem outro número racional.

Isto torna **Q** infinito de muitas maneiras:

- cresce indefinidamente no sentido positivo, como **N**, ou
- decresce indefinidamente no sentido negativo como **Z**, e
- finalmente tem uma infinidade de número racionais entre quaisquer dois números racionais.

Observe uma interpretação geomé trica desta afirmação na figura (fig. 4.3) na página 118.

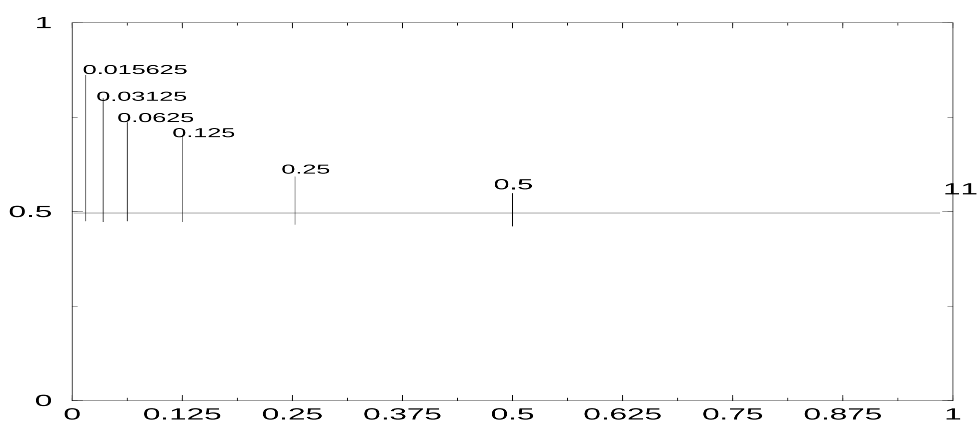

Figura 4.3: entre dois racionais sempre há outro...

Exemplo 32 *Entre dois racionais há outro racional.*

- *Entre 0 e 1: 0.5*
- *Entre 0 e 0.5: 0.25*
- *Entre 0 e 0.25: 0.125*
- *Entre 0 e 0.125: 0.0625*
- *Entre 0 e 0.0625: 0.03125*
- *Entre 0 e 0.03125: 0.015625*

Observe na figura (fig. 4.5) página 119, o intervalo $[0, 1]$ *colocado sob lente de aumento.*

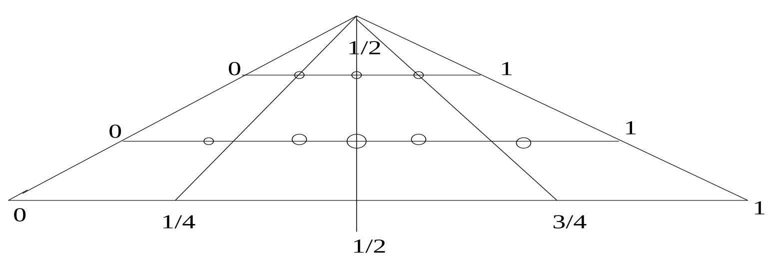

Figura 4.4: O intervalo $[0, 1]$ colocado sob uma lente.

Figura 4.5:

Em suma, do exemplo acima tiramos uma *visão geométrica* do *conjunto dos números racionais*:

Propriedades comparativas da reta e de Q.

1. **Ponto privilegiado**

   - **Numa reta existe um ponto privilegiado que a divide em duas semi-retas**

- **Em Q existe um ponto privilegiado, o zero[13], que dividem Q em dois conjuntos, o conjunto dos números racionais positivos, $\mathbf{Q}^+$ e o conjunto dos números racionais negativos, $\mathbf{Q}^-$.**

2. **Existencia de um ponto entre dois outros.**
   - **Numa reta qualquer, dados dois pontos, sempre existe um terceiro ponto entre os anteriores.**
   - **Em Q dados dois números, sempre podemos "calcular" um ponto entre os dois outros, por exemplo a mé dia aritmética.**
3. **Existencia de um ponto externo a dois outros. Propriedade arquimediana dos racionais.**
   - **Numa reta, dados dois pontos, sempre existe um ponto que não se encontra no segmento de reta determinados por eles.**
   - **Em Q, dados dois números, sempre existe um terceiro que é maior[14] que os outros dois e mesmo um quarto que é menor que os dois dois.**
4. **conjunto infinito**
   - **Uma reta é um conjunto infinito.**
   - **Q é um conjunto infinito.**

Tivemos o cuidado de expressar todas as propriedades de retas precedidas do artigo indefinido, porque há muitas retas, entretanto sempre usamos o *modo definido* para fazer referência ao conjunto **Q** que é um só.

Estas propriedades nos permitem de identificar numa reta qualquer uma cópia de **Q**.

```
___-4____-3____-2____-1_____0_____1_____2_____3_____4_ ...
```

escolhendo um ponto para representar o 0 e depois, a intervalos iguais, os números inteiros, e depois *entre* estes os números fracionários não inteiros. Desta forma o subconjunto dos racionais positivos se encontram ocupando uma das semi-retas, e o subconjunto dos racionais negativos a outra.

4.4.2 Números irracionais na reta.

A descoberta dos gregos da época de Pitágoras, entretanto, foi a de que *havia número na reta que não era racional.* Basta dar um exemplo para comprovar o fato.

Se supusermos que existe um número racional simplificado $\frac{p}{q}$, isto é em sua forma irredutível, tal que

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

---

[13] não precisava ser o zero, podia ser qualquer outro ponto, a escolha de outro ponto iria apenas tornar a nossa *álgebra mais complicada.*

[14] Depois iremos redigir esta propriedade de outra forma e chamá-la de arquimediana.

seremos conduzidos a uma contradição:

$$x = \frac{p}{q} \text{ e } x = \sqrt{2}$$
$$x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2$$
$$\frac{p^2}{2} = q^2 \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad p^2 \;\text{ é par}$$
$$p^2 = 4p'^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2} = 2p'^2 = q^2 \quad \Rightarrow \quad q \text{ épar}$$

isto é, numerador e denominador da fração $\frac{p}{q}$ tem que ser pares apesar de que a fração seja por hipótese irredutível.

A figura (fig. 4.6), página 121, contem a representação gráfica de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} = 2$.

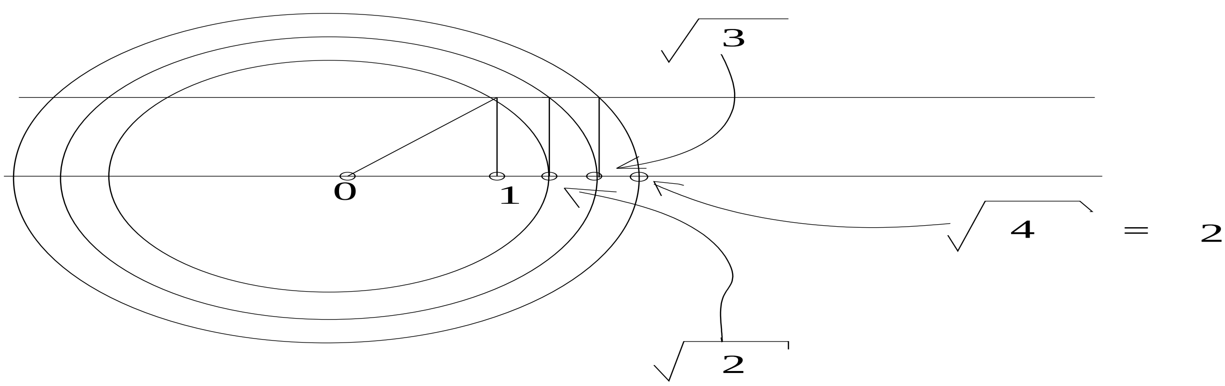

Figura 4.6: Raizes quadradas

Você pode calcular geometricamente as sucessivas raízes quadradas de números naturais. Comece com $\sqrt{2}$. traçando um círculo que tem por raio a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados 1.

- Use a raiz para construir um triâ ngulo retângulo com um cateto de lado 1;
- Use a nova hipotenusa com raio para obter a nova raiz.

Observação 22 *Aqui usaremos o* princí pio do terceiro excluso *para entender o que está acontecendo, que é a justificação das demonstrações por absurdo.*

1. *$x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ está na forma irredutível.*
2. *$x = \sqrt{2}$.*
3. *numerador e denominador de x são números pares.*

Ou o primeiro item é falso ou o terceiro tem que ser, porque eles são incompatíveis.

Como o primeiro é uma hipótese possível e foi admitida, e do segundo se deduz o terceiro, então a inclusão do segundo item gerou a contradição, logo ele é falso.

Então o contrário do segundo item[15] *é verdadeiro:*

$$x \neq \sqrt{2}$$

isto é não pode haver um número racional igual a $\sqrt{2}$.

Em lógica formal, que é a máquina que usamos para fazer Matemática, vale o princípio:

Se a proposição A for falsa, então a proposição (não A) é verdadeira.

Sempre, uma das duas, **A** *ou* **não A**, *e apenas uma delas, faz parte dos Teoremas ou Postulados da Matemática. Se não pudermos demonstrar, é um postulado.*

O que se tornou um quebra-cabeças para os pitagóricos foi que eles conseguiam colocar $\sqrt{2}$ na mesma reta em que se encontravam todos os números racionais.

O mé todo é simples e você está convidado a reproduzí-lo:

Escolha na reta o número racional 1 e sobre ele levante, perpendicularmente, um segmento de reta de comprimento 1. Agora tire da origem até a extremidade apropriada deste segmento, um segmento de reta de modo a construir um triâ ngulo retângulo. Pelo `teorema de Pitágoras`, o comprimento deste segmento é $\sqrt{2}$. Com um compasso, com abertura $\sqrt{2}$, uma das pontas na origem, a outra ponta se encontrará no final do segmento que representa a hipotenusa. Você pode traçar uma circunferência que ira cortar a reta em dois pontos que se encontram à distância $\sqrt{2}$ da origem, um desses pontos está na semi-reta que contem $\mathbf{Q}^+$, é $\sqrt{2}$ e outro está na semi-reta que contem $\mathbf{Q}^-$, é $-\sqrt{2}$.

Então na reta existem *outros números* além dos números racionais. Este será o assunto do próximo capítulo: a construção geométrica de $\mathbf{R}$.

Observe figura (fig. 4.6) na página 121.

4.4.3 Representação geométrica de de um número racional

Vamos mostrar aqui como podemos representar qualquer fração $\frac{p}{q}$ *na reta.* Observe o gráfico na figura (fig. 4.2) na página 107.

1. **caso de frações próprias positivas.** Os passos são os seguintes:

   (a) Trace uma reta e nela represente o zero. Chame esta reta de $\mathbf{Q}$.

   (b) A espaços iguais, por exemplo, a cada centímetro, represente um inteiro, represente por exemplo de -4 a 3, em $\mathbf{Q}$.

   (c) Representação de $\frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbf{N}$.

   Considere e a fração $\frac{p}{q}$ com denominador e denominador positivos.

[15] o segundo item é terceiro a ser excluido, porque tem tres itens...

i. Trace uma semi-reta partindo de zero passando num ponto P qualquer do plano fora da reta $\mathbf{Q}$.

ii. Chame esta semi-reta de *obliqua.*

iii. Na semi-reta *obliqua* marque o número inteiro positivo q, e todos os que o antecedem até o zero que é o zero comum a ambas as retas. O número positivo q não precisa coincidir com o ponto P, mas você poderia redefinir P para que eles coïndissem.

iv. Trace o segmento de reta que une q ao $1 \in \mathbf{Q}$.

v. Trace paralelas a este último segmento passando pelos inteiros que estiverem entre 0 e q na semi-reta *obliqua*.

vi. Identifique os pontos de encontro das parelalas construidas no item anterior sobre $\mathbf{Q}$.

vii. Por semelhança de triângulos, os segmentos de reta entre 0 e 1 em $\mathbf{Q}$, tem todos o mesmo comprimento que vale $\frac{1}{q}$ e sucessivamente representam as frações
$$\frac{1}{q}, \frac{2}{q} \dots \frac{q}{q} = 1.$$

viii. Em particular, se $p < q$ o número racional $\frac{p}{q}$ será um dos números acima.

2. **caso de frações impróprias positivas.** Para obter uma fração imprópria, aquelas em que o numerador é maior do que o denominador, basta considerar, na construção acima, sobre a obliqua, números inteiros maiores do que q. Corrrespondente ao número q sobre a obliqua, teremos um segmento de reta que termina em 1. Correspondente um número inteiro positivo p maior do que q teremos uma fração imprópria $\frac{p}{q} > 1$.

3. Constrúa as frações de denominador 3 desde $\frac{0}{3}$ até $\frac{5}{3}$.

4. **O caso das frações negativas.** A mesma construção pode ser feita, considerando agora números negativos e usando -1 como ponto de referência para obter os triângulos semelhantes. Será necessário continuar a sem-reta obliqua para além do zero.

4.5 Um programa para ensinar os inteiros ao computador

Este programa é uma "farsa" no sentido de que ele *ensine* as contas ao computador. A nossa única pretensão com esta seção é justificativa do aparato abstrato que estamos construindo. Com este programa estamos lhe fornecendo uma pálida amostra de como a abstração, em Matemática, tem uma utilização prá tica muitas vezes siquer imaginada pelos que ingenuamente procuram inventar uma falsa metodologia para o ensino desta disciplina tentando substituir o árduo caminho da construção lógica com brincadeiras que deveriam apenas representar a distensão, necessária, no trabalho em sala de aula, mas se tomada como um método construtivo só pode conduzir a uma superficialidade no ensino que interessa, sim, aos desonestos que pretendem subjugar nosso país e mantê-lo como uma colônia das multinacionais onde apenas se dançe e se assista futebol durante os apagões.

O Programa abaixo está escrito em Python, uma linguagem de programação de domínio público. Esta linguagem roda em diversas plataformas computacionais, em LinuX por exemplo. Se você quiser rodar o programa, solicite aos autores uma cópia pela internet.

O objetivo aqui é apenas de mostrar a necessidade de saber abstrair, inclusive para nos comunicarmos com um objeto como um computador.

```
#!/usr/bin/python
### estensao dos metodos da aritmetica aos inteiros

## Definicao da troca de sinal
def t(x):
        return -x
## estensao da adicao aos numeros inteiros.
def adicao(x,y):
        if ((x ¿= 0) and (y ¿=0)):
                return x+y
        if ((x ¿=0)  and (y ¡= 0)):
                if t(y) ¿ x:
                return t(t(y)-x)
                else:
                return x - t(y)
        if ((x ¡=0)  and (y ¿= 0)):
                return adicao(y,x)
        else:
                return t(adicao(t(x),t(y)))

## estensao da multiplicacao ao numeros inteiros
def multiplicacao(x,y):
        if ((x ¿= 0) and (y ¿= 0)):
                return x*y
        if ((x ¿= 0) and (y ¡= 0)):
                return t(x*t(y))
        if ((x ¡= 0)  and (y ¿= 0)):
                return multiplicacao(y,x)
        else:
                return (multiplicacao(t(x),t(y)))

## estensao da desiguladade aos numeros inteiros
def maior_do_que(x,y):
        resposta = "eles sao iguais ! "
        resposta1 =str(x)+"> "+str(y)
        resposta2 =str(y)+"> "+str(x)
        if x==y:
                return resposta
        elif ((x ¿= 0)and (y ¿= 0)):
                if x ¿ y:
                return resposta1
                else:
                return resposta2
```

```
        elif ((x ¿= 0)and (y ¡= 0)):
                return resposta1
        elif ((x ¡= 0)and (y ¿= 0)):
                return resposta2
        elif (t(y)¿ t(x)):
                return resposta1
        else:
                return resposta2

def limpa_tela():
        n = 0
        while n ¡ 23:
                print
                print chr(7)
                n = n+1

def separa():
        print
        print
        print chr(7)

def finalizando():
        fim = raw_input(”quer terminar ? ”)
        if fim == ”nao”:
                fim =
                limpa_tela()
                print ”OK, continuando....”
        elif fim == :
                limpa_tela()
                print ”OK, continuando....”
        elif fim == ”n”:
                fim =
                limpa_tela()
                print ”OK, continuando....”
        separa()


=== m  aquina de calcular ==================


fim =
limpa_tela()
while fim == :
        print ”Posso ”
        print ”somar ( + ), multiplicar ( * ), ou comparar ( ¡ ) ”
        print ”dois numeros dados.”
        separa()
        print ”De-me os dois numeros, ”
        x = input(”o primeiro numero: ”)
        y = input(”o segundo numero: ”)
```

```
            limpa_tela()
            print "os numeros escolhidos foram ",x,y
            separa()
            print "Qual eh o metodo: ", "+, * , ¡ ? "
            metodo = ra_input("metodo —¿ (+ * ¡ )")
            limpa_tela()
            if (metodo=="+"):
                    print "a adicao dos dois numeros ", x,,y, "eh ", adicao(x,y)
                    print
                    print chr(7)
            elif (metodo=="*"):
                    print "o produto dos dois numeros ", x,,y, "eh ", multiplicacao(x,y
                    print
                    print chr(7)
            else:
                    print "A comparacao entre os dois numeros", x,,y, "eh, ", maior_do
                    print
                    print chr(7)
                    print 'escreva "fim", (basta uma letra), quando quiser terminar'
            fim = raw_input('ou "enter"se quiser continuar –¿[')
limpa_tela()
print chr(7)
print "Muito obrigado por ter se usado o "
print "sistema 'aritmetica' ... "
separa()
print chr(7)
print "Suas sugestoes sao bem vindas para melhorar o "
print "programa."
separa()
print chr(7)
print "Lute para que haja computadores nas Escolas."
print "Claro, computadores a servico dos professores,"
print "e nao computadores somente para a diretora...."
print
print chr(7)
print "Lute para que o salario do professor seja bom."
print chr(7)
print
print "Lute por um plano de carreira dos professores"
print "em todos os niveis."
print chr(7)
```