Capítulo 3

Relações e Funções.

Neste capítulo vamos estudar `relações` que é o modelo dentro do qual se encontram as funções como um caso particular. Claro, as função são de longe o exemplo mais importante de relações.
Vamos repetir o estudo de certos modelos que apareceram nos capítulos anteriores sob uma nova visão.

3.1 Relações.

O padrão intuitivo de relação envolve dois elementos X, Y e uma lei para definir se é verdade que X está relacionado com Y, ou se, reciprocamente, Y está relacionado com X.

Por exemplo, se $X \subset Y$ for verdadeira, $Y \subset X$ pode ser verdadeira ou não, (se for, os conjuntos são iguais). Vamos usar o símbolo $R(X, Y)$ para representar a frase "X está relacionado com Y.

Vemos desta discussão que estamos fazendo referência aos pares (X, Y) de objetos que pertencem a determinados conjuntos. Isto nos conduz à seguinte definição:

Definição 13 *Relação R entre os conjuntos A e B.*

Diremos que temos uma relação R entre os conjuntos A, B se R identificar um subconjunto de A x B.

Usaremos a mesma letra R para identificar este subconjunto de A x B, quer dizer que $R \subset A$ x B, e mais usaremos como equivalentes:

$$R(x, y) \text{ é verdadeiro } \equiv (x, y) \in R$$

Quando $A = B$ diremos: R é uma relação em A.

Exemplo 22 *Relações aritméticas.*

1. *A desigualdade*[1] *em* $\mathbf{N}$.
   Em $\mathbf{N}$ existe uma relação designada pelo símbolo "$<$". Ela está intimamente ligada com o princípio da tricotomia que dizemos existir em $\mathbf{N}$:

[1] Neste capítulo olhamos para $\mathbf{N}$ como Kronecker dizia, "Deus nos deu os números naturais, o resto nós fizemos." Kronecker sabia que era muito difícil construir o conjunto dos números naturais...

Princípio da tricotomia: *Dados dois números naturais m, n apenas uma das relações seguintes é verdadeira:*

- $m = n$;
- $m < n$;
- $n < m$;

A palavra `tricotomia` *é composta de duas palavras gregas, uma delas significa "três" e a outra "corte".*

Observe o significado geométrico da `tricotomia`. $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *é o primeiro quadrante consideradas apenas as coordenadas inteiras.*

A primeira propriedade se refere aos pares (m, m) em que as duas coordenadas são iguais, quer dizer a diagonal do primeiro quadrante.

A segunda propriedade

$$R(m, n) = \text{“}m < n\text{”}$$

isto significa que o par (m, n) se encontra acima da diagonal e portanto R é o subconjunto do primeiro quadrante formado de todos os pontos que se encontram acima da diagonal.

A terceira propriedade $R(m, n) =$ "$m > n$"representa o complemento das duas outras o que nos levaria a representar R pelo outro subconjunto que fica abaixo da diagonal, mas sem incluir a própria.

2. *Uma outra relação, menos geomé trica é $\subset$. Considere os conjuntos*

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \ ; \ \mathbf{P}(A);$$

Pelo binômio de Newton, $card(\mathbf{P}(A)) = 2^4 = 16$.

A figura (fig. 3.1) mostra o diagrama de Hasse de $\mathbf{P}(A)$. *Este tipo de diagrama é especial para mostrar as relações de ordem*[2], *(a inclusão é uma relação de ordem).*

Observe que no diagrama de Hasse, cada vez que um conjunto tiver menos elementos, *é* maior *o número de linhas que o têm como ponto de chegada, porque eles são subconjuntos de quantidade maior de conjuntos.*

Quando não houver linha ascendente, se tem um par de conjuntos que não são comparáveis, *nenhum dos dois é "maior" ou "menor" do que o outro. Eles estão no mesmo nível.*

Há vários tipos de relações, vamos estudar três tipos aqui:

- Relações de ordem.
- Relação de equivalência.
- As funções.

Este último tipo será estudado em separado na próxima seção. Os dois primeiros serão vistos logo a seguir.

[2] logo a seguir discutiremos as relações de ordem

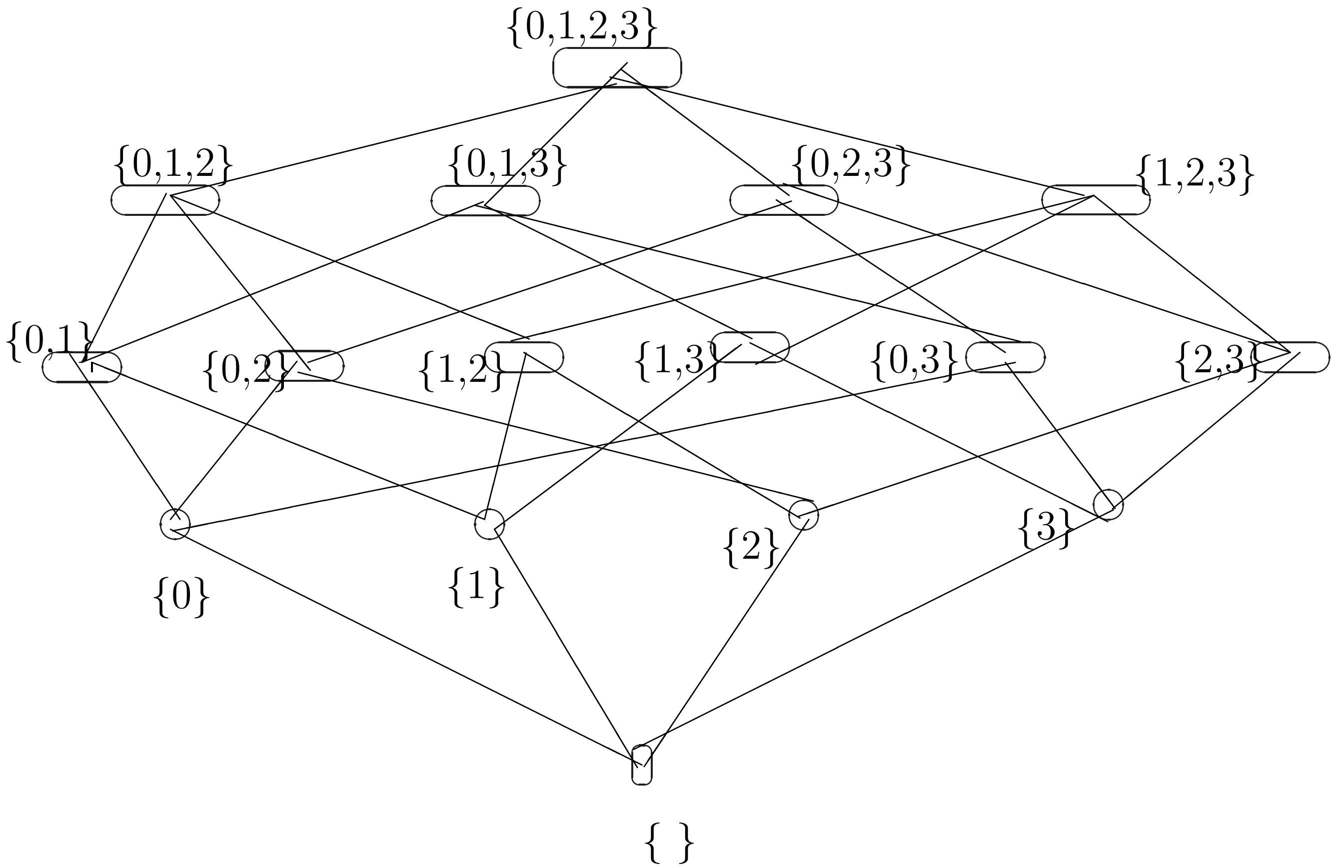

Figura 3.1: Diagrama de Hasse de P(A); A $= \{0, 1, 2, 3\}$

3.1.1 Relações de ordem.

Escrevemos o título desta seção no plural, e existem várias de relações de ordem? Vejamos um exemplo:

Exemplo 23 *A ordem dos números de telefone*

Quando nos referimos as estruturas, *no capítulo 1, ver índice remissivo, falamos de estrutura de ordem que podia ser encontrada no conjunto dos números de telefones.*

Para colocar em ordem o conjunto dos números dos telefones precisamos primeiro descobrir a estrutura interna que estes "números" têem. Os números

$$(021)223443, (021)332331$$

não podem ser vistos como

$$021223443, 021332331$$

ou, como zero não vale nada,

$$21223443, 21332331.$$

Um "número"[3] *de telefone é formado de seções distintas, uma delas é o* código de área. *Se formos colocar em ordem:*

$$(021)332345, (011)123345, (021)232234, (011)343321$$

[3]estamos escrevendo com aspas a palavra "nú mero" de telefone, porque eles não são números de verdade, não podemos fazer operações aritméticas com eles.

primeiro ordenariamos pelos códigos de área, depois pelo corpo do número do telefone:

$$(011)123345, (011)343321, (021)232234, (021)332345;$$

de modo que todos que tenham o mesmo código área fiquem juntos. Portanto na definição desta relação de ordem primeiro verificariamos a ordem entre os códigos de área, depois a ordem entre o corpo dos números de telefones.

Não fariamos nada disto se estivessemos colocando em ordem os números inteiros

$$11123345, 11343321, 21232234, 21332345;$$

que simplesmente compararíamos como números sem olhar pedaços dentro de cada um deles. Isto responde a nossa pergunta inicial: tem vários tipos de ordem? cuja resposta é“sim”.

Uma relação de ordem menos habitual, que é a primeira que vamos estudar, é relação de ordem entre os subconjuntos de um conjunto universo A.

Ordem em $\mathbf{P}(A)$.

Olhe o diagrama contido na figura (fig. 3.1), página 69. As linhas que ligam os nós representativos de cada conjunto estão indicando $X \subset Y$. Se não houver nenhuma linha entre X, Y isto significa que nem $X \subset Y$ nem $Y \subset X$. Se um conjunto X for subconjunto de outro Y é razoável dizermos que X é menor que do Y, pelo menos porque X tem menos elementos do que Y.

Então, nesta relação de ordem há elementos que não são comparáveis. Observe os conjuntos 3 a 3, eles se encontram no mesmo nível hierárquico relativamente a esta relação de ordem. As relações seguintes são falsas:

$$\{0,1,2\} \subset \{0,1,3\} \ ; \ \{0,1,3\} \subset \{0,1,2\}$$

Vejamos quais são as propriedades de uma ordem:

Definição 14 *de ordem.*

1. *transitividade Se $X \subset Y$ e $Y \subset Z$ então $X \subset Z$, é sempre verdadeiro.*
2. *reflexividade Sempre é verdadeiro que $X \subset X$.*
3. *anti-simétria Se $X \subset Y$ e $Y \subset X$ então $X = Y$. Isto é, só pode acontecer desigualdades simétricas quando for com o mesmo elemento. Se usarmos a notação R acima, diriamos: $R(X,Y)$ e $R(Y,X)$ se, e somente se, $X = Y$.*
4. *A totalidade não vale Não é verdade que para qualquer par (X,Y) valha $X \subset Y$ ou $Y \subset X$. Observe o que dissemos acima a respeito das linhas no diagrama de Hasse. Quer dizer que a relação de ordem $\subset$ não é total. Quando uma ordem não for total, dizemos que ela é parcial Dizemos ainda que $\mathbf{P}(A)$ não é totalmente ordenado pela inclusão, (veja o exemplo acima com os conjuntos $\{0,1,2\}, \{0,1,3\}$).*

   Uma outra forma de falar: “$(\mathbf{P}(A), \subset)$ é uma estrutura de ordem parcial”, (por causa da 4ª propriedade que não vale).

Verifique você mesmo que $(\mathbf{N}, \leq)$ é uma estrutura de ordem total, (porque vale a 4ª propriedade).

Exercício 6 *Relações de ordem*

1. *Defina formalmente a ordem que existe entre as palavras da lingua portuguesa. Vamos chamar este conjunto de L. Decida $(L, \leq)$ é uma ordem total? Existe um menor elemento em L ? qual? Depende de como você definiu $x \leq y$. Tem um maior elemento? Quer dizer, L tem um máximo, L tem um mínimo? Observe que esta pergunta pode ser feita de outra forma: todo dicionário tem um começo? tem um fim?*
2. *Considere $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $\mathbf{P}(A)$. Verifique quantas relações do tipo $X \subset Y$ é possível construir com $X, Y \in \mathbf{P}(A)$.*
3. *Vamos afrouxar um pouco a definição de "palavra" estabelecendo que quem quiser pode definir uma nova palavra. Verifique se é verdade ou falso em L que, dadas duas palavras x, y tem sempre uma palavra z; $x \leq z \leq y$.*
4. *Se não tivessemos adotado a convenção do afrouxamento na questão anterior, qual seria resposta?*
5. *Na estrutura de ordem $(\mathbf{N}, \leq)$ vale a propriedade dados dois nú meros x, y tem sempre um número z; $x \leq z \leq y$?*

Existe mais um conceito importante que vamos induzir com exemplos e ao qual voltaremos mais a frente no capítulo 4, quando estudarmos os números.

Considere $\mathbf{P}(A)$. Há aí dois "elementos" peculiares: $A, \{\}$. O primeiro, A contém todos os outros, e nós diremos que é o `máximo` de $\mathbf{P}(A)$. O segundo, $\{\}$ está contido em todos os outros, e nós o chamaremos de `mínimo` de $\mathbf{P}(A)$.

Podemos definir um conjunto chamado "*das partes estritas* de A. Neste conjunto não entram nem A nem $\{\}$. Mas duas afirmações feitas acima continuam verdadeiras: A contém todos os outros, $\{\}$ está contido em todos os outros.

Mas, agora, A e $\{\}$. se encontram fora do universo dos elementos submetidos åcomparação, vamos dizer que A é supremo do conjunto das partes estritas de A, e da mesma forma $\{\}$ é o í nfimo.

Mais dois conceitos são importantes. Volte a considerar o conjunto das partes estritas de A. Os conjuntos 3 a 3 agora são os má ximos para uma coleção de subconjuntos, veja quais. Como eles mão são comparáveis, eles são chamados de *maximais*.
.

Podemos dizer algo semelhantes relativamente aos conjuntos unitá rios, agora invertendo a desigualdade. Os conjuntos unitários são os mínimos para uma coleção de conjuntos, (veja quais). Mas eles não são mínimos... e porisso eles são chamados de *minimais*.

A palavra *extremal* faz referência tanto a minimal como a maximal.

Os *extremais* são típicos das relações de ordem parcicial, mas observe que um *máximo* é um maximal, e que um mínimo é um minimal.

As definições de supremo, máximo, mínimo e infimo, geram confusão entre os que estão aprendendo o assunto.

Um outro conceito é importante nos conjuntos ordenados parcialmente. Vamos continuar usando $\mathbf{P}(A)$ como exemplo. Olhe o grá fico (fig. 3.1), na página 69. Observe que alguns conjuntos estão ligados por linhas ascendentes desde $\{\}$ até A. Eles formam o que chamamos uma *cadeia*, um subconjunto totalmente ordenado.

Definição 15 *Cadeia*
É um conjunto totalmente ordenado de uma estrutura de ordem.

Um outro tipo de relação de equivalência. A igualdade entre números é um exemplo.

3.1.2 Relação de equivalência.

Uma relação de equivalência serve para classificar os objetos de um conjunto. São elas que produzem as partições de um conjunto de que já falamos.

Se R for uma relação de equivalência em A então R produz uma partição de A. Cada uma das partes de A assim produzidas se chama uma classe de equivalência.

Vamos escrever a definição de `relação de equivalência`:

Definição 16 *Relação de equivalência R. Diremos que R é um relação de equivalência definida em A se, e somente se,*

- *reflexividade* $R(x,x)$ *for verdadeira para todo* $x \in A$.
- *simetria* $R(x,y) \;\Rightarrow\; R(y,x)$, *isto é, se* $R(x,y)$ *for verdadeira, também* $R(y,x)$ *será.*
- *transitividade* $R(x,y)$ *e* $R(y,z) \;\Rightarrow\; R(x,z)$, *isto é, se* $R(x,y)$ *e* $R(y,z)$*forem verdadeiras, também* $R(x,z)$ *será.*

O conjunto de todos os elementos Y tal que $R(x,y)$ é verdadeiro, se chama $\overline{x}$ a classe de equivalência de x.

Exemplo 24 *Um exemplo de relação de equivalência.*

Considere a seguinte partição de A

$$\{0,1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8\},\{9\}.$$

Para obter A basta calcular a união de todas as partes, porque, por definição, quando se tem uma partição a união dos subconjuntos recompõe o universo. Também, por definição as partes são disjuntas.

Vamos testar as propriedades. Cada uma das partes de A listada acima é uma classe de equivalência. Então tomando dois elementos,x,y, em qualquer classe

$$R(x,y) \;\Rightarrow\; R(y,x)$$

o único caso crítico é a classe $\{9\}$ em que os dois elementos serão iguais. Vale a transitividade, e novamente a classe $\{9\}$ é a mais crítica para analisar, entretanto tudo que se passa é que os três elementos para os quais a propriedade vai valer, tem que ser iguais, mas vale...

A propriedade reflexiva é sempre a mais trivial de verificar, porque se não valesse tinha um elemento $x \in A$ que não pertenceria a nenhuma classe, mas neste caso a união não reproduziria A. Contradição. Assim a relação de equivalência associada a partição

$$\{0,1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8\},\{9\}.$$

de A serve para classificar os elementos de A que por uma razão qualquer devem ficar numa mesma classe.

Exemplo 25 *Classificação de grãos.*

Uma fazenda usa dois tipos de peneiras, cujos buracos tem uma diferença de 1 milimetro, para classificar feijão. Portanto a sua produção de feijão vai ficar toda classificada em

- A_1 *o conjunto dos grãos de feijão pequenos, que passam em todas as peneiras.*
- A_2 *o conjunto dos grãos médios, que passam em uma das peneiras.*
- A_3 *o conjunto dos grãos grandes, que não passam em nenhuma das peneiras.*

Verifique que valem as três propriedades.

Exemplo 26 *A relação de igualdade. A relação de igualdade é um tipo de relação de equivalência que produz a partição mais fina. Nela todas as classes de equivalência são conjuntos unitários.*

Exercício 7 *Relações*

1. *Mostre que a relação "a divide b" é uma relação de ordem parcial em* **N**. *Exiba alguns pares não ordenáveis.*
2. *Considere a relação de ordem parcial "a divide b". Tome "a=3" e encontre a cadeia a que "a=3" pertence. Esta correto usar o artigo definido: "a cadeia a que "a=3" pertence"?*
3. *Quais são os minimais da relação "a divide b" em* **N**? *Há maximais? Verifique se todo minimal é ponto de partida de uma cadeia.*
4. *Verifique que o teste "divísivel por dois" particiona o conjunto* **N** *em duas classes de equivalência. O que significa dizer que X é equivalente a Y nesta relação de equivalência?*
5. *Verifique que o teste "divísivel por três" particiona o conjunto* **N** *em três classes de equivalência. O que significa dizer que X é equivalente a Y nesta relação de equivalência?*
6. *Duas frações são ditas equivalentes se formarem uma proporção. Verifique se valem as três propriedades. Dê exemplos de três frações equivalentes.*

3.2 A definição de função.

As funções são um tipo de relação mais simples, os gráficos das funções "mais comuns" são curvas, segmentos de retas. Com muita frequência vemos gráficos de curvas nos jornais indicando como mudam ou evoluem alguns fenômenos.

Observe a diferença entre as duas tabelas abaixo:

lista dos enfermeiros de plantão

`enf\dia`	seg	ter	qua	qui	sex	sab	dom
a	Eva	Elias	Elias	Maria	Elias	Elson	Elias
b	Dayse	Elson	José	-	João	João	Eva
c	João	Eva	Denise	-	Maria	Maria	Dayse
d	José	Maria	-	-	Eva	-	-
e	Maria	-	-	-	José	-	-
f	-	-	-	-	Elson	-	-

Obs.Na coluna à esquerda se encontra a indicação das enfermarias onde os enfermeiros podem ser encontrados.

enf\dia	seg	ter	qua	qui	sex	sab	dom
Qtde	5	4	3	1	6	3	3

Na primeira tabela e na segunda se tem dois aspectos da mesma informação.

A primeira é *descritiva*, indica quais são os enfermeiros que estão de plantão e em que enfermaria eles se encontram.

A segunda tabela é quantitativa, ele registra apenas a quantidade de enfermeiros que se encontram de plantão.

A segunda tabela é mais simples e dá uma ideia imediata da força de trabalho disponí vel, ou do nível de emergência necessário em cada um dos dias da semana. Dela se pode deduzir, numa rá pida olhadela, que há dois dias críticos, sexta e segunda porque há necessidade de mais enfermeiros de plantão, e a quinta-feira é um dia de paz no hospital, pelo menos habitualmente.

Claro, as duas tabelas tem funções específicas e não podemos dizer que uma é mais importante que a outra, mas queremos salientar que a segunda tem a informação mais concentrada e mais fácil de ser percebida. Nesta se pode dizer que:

- para $x \in \{seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom\}$;
- existe um único $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- y está relacionado com x.

As duas tabelas representam relações. A primeira entre os conjuntos

$$\mathcal{S} = \{seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom\}$$

e

$$\mathcal{E} = \{\text{José}, Maria, Elias, Elson, Dayse, Eva, \text{João}\}$$

A segunda tabela estabelece uma função entre os conjuntos

$$\mathcal{S} = \{seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom\}$$

e

$$\mathcal{Q} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Como já definimos, uma relação é um subconjunto de um *produto cartesiano*. No primeiro caso temos

$$R \subset \mathcal{S} \ \text{x} \ \mathcal{E}$$

e no segundo caso temos

$$f \subset \mathcal{S} \ \text{x} \ \mathcal{Q}.$$

No produto cartesiano $\mathcal{S}$ x $\mathcal{Q}$, o primeiro conjunto, $\mathcal{S}$, é chamado `domínio` da relação e o segundo conjunto, $\mathcal{Q}$, se chama de `contra-domínio` da relação.

Quando uma relação R goza da propriedade:

$$\forall x \in \text{ domínio } \exists \text{ um único } y \in \text{contra-domínio} \ ; \ R(x, y)$$

ela se chama `função`. A segunda tabela representa uma função, porque para cada x do conjunto dos dias da semana temos exatamente uma informação associada x, chamada $f(x)$ e neste caso:

$$f(x) = \text{ quantidade de enfermeiros de plantão no dia } x.$$

Observe na (fig. 3.2) um gráfico da função $y = f(x)$.

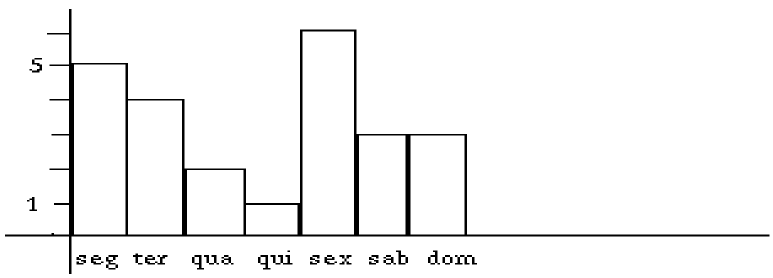

Figura 3.2: Histograma dos enfermeiros.

No próximo gráfico você encontra algo parecido com o que já deve ter visto num jornal, digamos a "evolução do preço do dolar" ao longo da semana. O gráfico "nos diz":

> inicialmente, de segunda para terç a, o dolar subiu de preço, passando depois a cair até sexta quando voltou a subir de novo mostrando uma tendência a super o preço mais alto obtido na segunda. Observe a (fig. 3.3) na página 76.

Este tipo de relação, as "funções" podem representar de modo muito simples e efetivo os fatos, como descrevemos acima com a *fictícia evolução do dolar*. O fato de que para cada x haver apenas um valor de y permite se descreva o comportamento de fenômenos usando as funções.

Há mais uma propriedade das funções que ainda não salientamos: o conjunto que chamamos `domínio` deve ser todo utilizado. Nestas condições aqui está definição de função:

Definição 17 *de função definida em A e tomando valores em B.*
Dizemos que a função f está definida em A e toma seus valores em B :

$$f : A \ \rightarrow \ B \ ; \ A \ni x \ \mapsto \ f(x) \in B$$

Figura 3.3: Evoluçõ do preço do dolar.

se para todo $x \in A$ houver um e somente um $y \in B$ tal que o ponto $(x, y) \in graf(f)$.

<u>Leitura</u> *A expressão $f : A \to B$ é lida "f de A em B".*

O conjunto dos pontos $(x, f(x))$ formam um sub-conjunto de A x B que chamamos $graf(f)$, o gráfico de f.

Nas figuras (fig. 3.2) e (fig. 3.3) você tem o grá fico de duas funções. Nos gráficos dos exemplos que seguem, (fig. 3.4),(fig. 3.5), (fig. 3.6), você vai encontrar gráficos feitos automaticamente por um programa de Cálculo Numérico representando funções definidas por uma expressão algébrica.

Exemplo 27 *1. Tomemos $f(x) = x$, quer dizer que os pontos que estarão no gráfico de f serão apenas aqueles em que as duas coordenadas forem iguais:*

$$\{(-10, -10), (-9, -9), (-8, -8), \ldots, (10, 10)\}.$$

O domínio escolhido foi o conjunto

$$A = \{-10, -9, -8, -7, \ldots, 7, 8, 9, 10\}.$$

Alé m de aparecerem no desenho os pontos de $graf(f)$ também estão desenhados os eixos de referência, eixo OX e o eixo OY. Ver o gráfico (fig. 3.4)

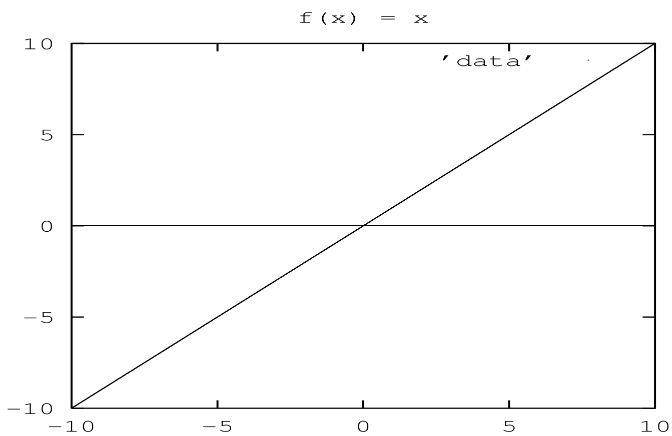

Figura 3.4: gráfico de $f(x) = x$ domínio $A = \{-10, -9, -8, ..., 10\}$.

2. *Tomemos $f(x) = x^2$, quer dizer que os pontos que estarão no gráfico de f serão apenas aqueles em que a coordenada y é o quadrado da coordenada x:*

$$\{(-5, 25), (-4, 16), (-3, 9), \ldots, (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}.$$

O domínio escolhido foi o conjunto $A = \{-5, -4, -3, -1, \ldots, 3, 4, 5\}$. Alé m de aparecerem no desenho os pontos de $graf(f)$ também estão desenhados os eixos de referência, eixo OX e o eixo OY. Ver o gráfico (fig. 3.5)

3. *Tomemos $f(x) = x + 1$, quer dizer que os pontos que estarão no gráfico de f serão apenas aqueles em que a coordenada y for uma unidade maior que a coordenada x:*

$$\{(-5, -4), (-4, -3), (-3, -2), \ldots, (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}.$$

O domínio escolhido foi o conjunto $A = \{-5, -4, -3, -1, \ldots, 3, 4, 5\}$. Fizemos aparecer no desenho também os eixos. Ver o gráfico (fig. 3.6)

Definição 18 *Imagem de uma função*
Se $f : X \to Y$ for uma função e $A \subset X$, chama-se imagem de A por f ao conjunto

$$f(A) = \{y \in Y \ ; \ y = f(x) \ ; \ x \in A\}$$

Exercício 8 *Propriedades da imagem de uma função Se $X \xrightarrow{f} Y$ for uma função qualquer, e $A, B \subseteq X$ verifique que*

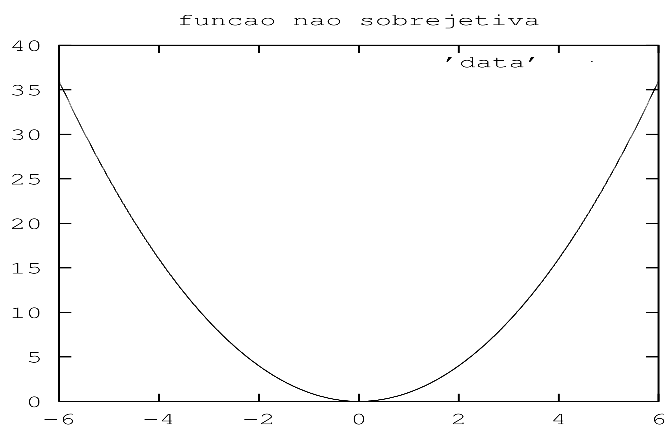

Figura 3.5: Gráfico de $f(x) = x^2$.

1. $f(\emptyset) = \emptyset$; $f(X) \subseteq Y$;

2. *Se* $A \subset B$ *então* $f(A) \subset f(B)$;

3. $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$;

4. $f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$.

Verifique também que, para imagem inversa valem

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$; $f^{-1}(Y) = X$;

2. *Se* $A \subset B$ *então* $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;

3. $f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$;

4. $f^{-1}(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$.

5. $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$

em que $A, B \subseteq Y$.

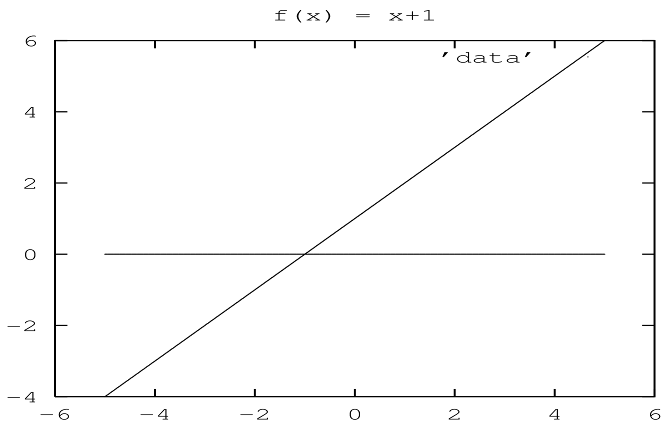

Figura 3.6: gráfico de $f(x) = x + 1$ domínio $A = \{-5, -9, -8, ..., 5\}$.

3.3 Tipos de função.

Uma utilidade das funções é `transformar` um conjunto n'outro de um modo que esperamos conseguir utilizar melhor a informação contida no primeiro.
Por exemplo, quando falamos emitimos "ondas sonoras" que tem *intensidade*, *frequência*, e *duração* que as caracterizam. Estes dados podem ser captados por um microfone e gravados numa fita. Mas se quisermos transmitir a voz a uma distância grande, por telefone, então temos que transformá-las em *sinal digital* porque eles ocupam menos espaço, é uma razão, e assim podem ser transmitidos com maior eficiência: rapidez, confiabilidade, etc...
Mas, ..., e do outro lado? lá está um humano cujo ouvido não entende de sinais digitais, e espera *intensidade*, *frequência* e *duração* para entender a mensagem. Então é preciso *transformar de volta* o *sinal digital* em *sinal sonoro*.

Não vamos fazer aqui digitalização de sinais... mas vamos dar os primeiros passos no sentido de entender como é que tais coisas ocorrem: quando podemos *transformar*[a] e depois *transformar de volta* sem perder informação[b].

[a] a palavra certa é *codificar* e depois *decodificar*.

[b] na verdade se perde informações **sempre**, mas o que se deseja é perder pouco.

3.3.1 Função injetiva.

O exemplo seguinte mostra como podemos, e porque razão fazemos, uma transformação em um conjunto de dados e sua recuperação posterior. É um exemplo simples.

Exemplo 28 *Uma codificação e sua decodificação. Considere o seguinte conjunto de dados.*

$$A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

e suponha que, no teclado o "-" está estragado, não funciona. *Então avisamos a quem vai receber esta "mensagem A" que somaremos a todos os números o número 5 (codificação), portanto do outro lado deverá ser feito o trabalho inverso, (decodificação). Então*

$$B = T(A) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{y\ ; y = x + 5\}.$$

Quem recebeu a mensagem do outro lado, conhecedor do "código" vai agora subtrair de todos os elementos do conjunto B 5 unidades para recuperar os valores primitivos:

$$A = T^{-1}(T(A)) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Isto só foi possível porque a função T usada para codificar *tem a seguinteo propriedade:*

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad T(x_1) \neq T(x_2)$$

quer dizer que T "separa" as imagens de pontos diferentes. Vamos ver o exemplo contrário, uma função que não "separa", ou "confunde" imagens: $S(x) = x^2$. Se aplicarmos S à informação inicial:

$$S(\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}) = \{25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16, 25\}.$$

Claro, ainda aqui seria possível recuperar os dados sabendo de informações adicionais, mas seria complicado. Mas a função T faz o trabalho de forma mais simples e imediata, porque "separa" as imagens de pontos diferentes.

As funções que fazem isto, *"separam" as imagens de pontos diferentes* se chamam `injetivas`

Definição 19 *Função injetiva.*

Uma função f se diz `injetiva` *se*

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Alguns autores preferem a palavra injetora.

Observação 12 *Valores subjetivos.*

É preciso salientar aqui que as funções "injetivas" não são melhores *que as outras. Não usamos adjetivos em* ciência*. O virus do HIV não é* ruim*, é apenas um* `virus`*, e claro, eu não estou interessado em ser infectado por ele, mas ele não é nem* ruim *nem* bom*. Quem é* ruim *ou* bom *para um determinado indivíduo, são as consequências dos fatos. Isto é subjetivo. Em suma, não estamos classificando as funções como* boas *ou* ruins*. Estamos apenas classficando-as para que as possamos utilizar da forma mais adequada. A função $S(x) = x^2$ pode servir para* esconder *informações, tem gente que gosta disto, e até precisa disto.*

Exercício 9 *Funções injetivas, (ou não).*

1. *Identifique quais das relações abaixo não é função injetiva, ou nem é* `função`

(a) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1,2,3\}; W = \{0,2,4,5\}\ ; x \mapsto y = 2x - 2$

(b) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1,2,3,4\}; W = \{0,2,4,5\}\ ; x \mapsto y = 2x - 2$

(c) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1,2,3\}; W = \{0,2,4,5\}\ ; x \mapsto 0$

(d) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{2,3,4\}; W = \{0,2,4,5\}\ ;$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \textit{ for par} \\ 1 & \textit{se } x \textit{ for impar} \end{cases}$$

(e) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1,2,3\}; W = \{0,2,4,5\}$

$$y > x \Rightarrow x \mapsto y$$

2. *Crie uma* expressão gráfica *adequada para cada uma das relações do item anterior.*

3.3.2 Função sobrejetiva.

Dos exemplos contidos no exercício 1, vamos considerar o seguinte:

$$U : \xrightarrow{f} W; U = \{1,2,3\}; W = \{0,2,4,5\}\ ; x \mapsto y = 2x - 2.$$

$U : \xrightarrow{f} W$ é uma função, *mas* não faz uso de todos os elementos do contra-domínio W. Observe que $5 \in W$ não é imagem de nenhum $x \in U$.

Diremos que esta função *não é sobrejetiva*, porque ela não utiliza todos os pontos do contradomínio.

Exemplo 29 *Tornando sobrejetiva uma função. O gráfico na figura (fig. 3.7) também conté m uma função que não é sobrejetiva* <u>*se*</u> *domínio for* $A = \{-5, -4, -3, ..., 5\}$ *e o contra-domínio for*

$$\{-25, -24, \ldots, 24, 24\}.$$

Deixe-nos salientar o condicional que empregamos: "A função não é sobrejetiva <u>*se*</u> *domínio for* $A = \{-5, -4, -3, ..., 4, 55\}$ *e o contra-domínio for*

$$\{-25, -24, \ldots, 24, 24\}''.$$

Porque podemos mudar o contra-domínio *da função, e consequentemente* redefiní-la, *estabelecendo:* $f : A \to \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ *e agora estaria usando todos os elementos do contra-domínio, claro, porque descartamos aqueles que não estavam sendo usados antes.*

Definição 20 *Função sobrejetiva.*

Diremos que uma função $U : \xrightarrow{f} W$ *é sobrejetiva, se para todo* $y \in W$ *existir* $x \in U$ *tal que* $y = f(x)$. *Alguns autores preferem a palavra* sobrejetora.

Exercício 10 *Funções sobrejetivas.*

1. *Identifique quais das funções abaixo não é sobrejetiva e, sendo o caso, a redefina para que se torne sobrejetiva.*

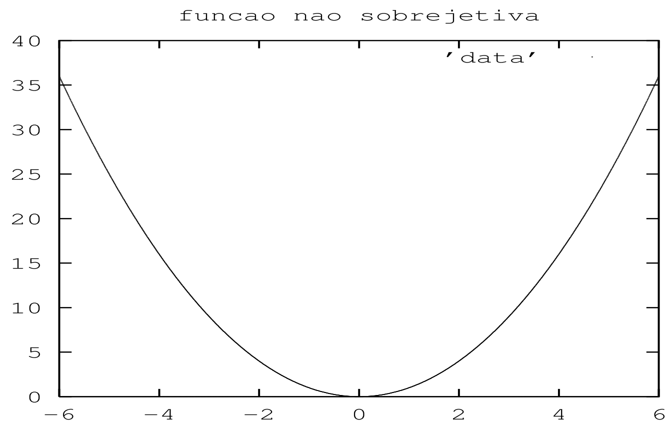

Figura 3.7: $f(x) = x^2$ esta função não é sobrejetiva se domínio $A = \{-5, -4, -3, ..., 5\}$; contra-domínio =

$$\{-25, -24, \ldots, 24, 24\}.$$

(a) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1, 2, 3\}; W = \{0, 2, 4\}\ ; x \mapsto y = 2x - 2$

(b) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1, 2, 3, 4\}; W = \{0, 2, 4, 8, 10, 12\}\ ; x \mapsto y = 2x - 2$

(c) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1, 2, 3\}; W = \{0, 2, 4, 5\}\ ; x \mapsto 0$

(d) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{2, 3, 4\}; W = \{0, 1, 2, 3\}\ ;$

$$x \mapsto 0 \quad \Leftarrow \quad x\ par\ ; x \mapsto 1 \quad \Leftarrow \quad x\ impar$$

(e) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1, 2, 3\}; W = \{0, 2, 4, 5\}\ ; x \mapsto y \quad \Leftarrow \quad y > x$

2. *Crie uma* expressão gráfica *adequada para cada uma das relações do item anterior depois das moficações feitas.*

3.3.3 Função bijetiva.

A definição de uma função bijetiva é:

Definição 21 *Função bijetiva.*

Diremos que uma função $U : \xrightarrow{f} W$ *é bijetiva, se for sobrejetiva e injetiva. Alguns autores preferem a palavra* bijetora*.*

Nós vimos nos exemplos sobre funções não sobrejetivas que isto pode ser "*corrigido*" retirando-se pontos do *contra-domínio* que não estejam sendo utilizados. De forma análoga podemos tirar pontos do *domínio* que tenham valores comuns com outros pontos de modo que a função se "torne" injetiva[4].

São as funções `bijetivas` as ideais para se fazerem as codificações ou decodificações das quais falavamos, uma vez que elas *identificam* os dois conjuntos, o domínio e o contra-domínio. Cada ponto de um destes conjuntos corresponde a um e a somente um ponto do outro conjunto. Desta forma se pode transformar um conjunto no outro e depois desfazer a transformação sem perda de informação. As palavras-chave aqui são `codificação` e `decodificação`. É isto que fazemos a todo momento com as telecomunicações transformando certos fatos físicos da realidade em sinais digitalizados, enviando estes dinais digitalizados e depois transformando de volta os tais fatos físicos[5] ao seu estado anterior. Como já dissemos, perdemos informações nestas transformações mas o que se perde não é visí vel ou audível de forma que do ponto de vista de nossas comunicações fica tudo perfeito.

Exercício 11 *Funções bijetivas.*

1. *Identifique quais das funções abaixo não é função bijetiva, e sendo o caso modifique o domínio, ou contra-domínio, fazendo a modificação mais econômica, para obter uma função bijetiva.*
   (a) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1,2,3\}; W = \{0,2,4,6\}\ ; x \mapsto y = 2x-2$
   (b) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1,2,3,4\}; W = \{0,1,2,3,4,5,6\}\ ; x \mapsto y = 2x-2$
   (c) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1,2,3\}; W = \{0,2,4,5\}\ ; x \mapsto 0$
   (d) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{2,3,4\}; W = \{0,2,4,5\}\ ;$
   $$x \mapsto 0 \iff x\ par\ ; x \mapsto 1 \iff x\ impar$$
   (e) $U : \xrightarrow{f} W; U = \{1,2,3\}; W = \{0,2,4,5\}\ ; x \mapsto y \iff y > x$
2. *Crie uma* expressão gráfica *adequada para cada uma das relações do item anterior, depois feitas as modificações necessárias.*

3.4 Funções polinomiais

Vamos estudar polinômios a parte no último capítulo. Agora vamos estudar dois tipos de polinômios, do primeiro e do segundo grau.
Parte do nosso objetivo são as equações polinomiais de grau menor ou igual a dois e um estudo gráfico das funções que podemos definir com estes polinômios.

3.4.1 A função linear afim

Resumo.

As funções lineares afins são definidas por meio dos polinômios do primeiro grau:

$$f(x) = ax + b$$

é uma função linear afim se $a \neq 0$.
Os gráficos destas funções são retas, as progressões aritméticas são funções deste tipo. Veremos isto aqui.

[4] a expressão "se torne" é incorreta, mas bastante usada, na verdade ao fazerem tais modificações, se redefine a função, se tem uma nova função.

[5] como se um sinal digitalizado não fosse um "fato físico"...

Um *polinômio do primeiro grau* é uma expressão do tipo

$$ax + b$$

em que a, b são dois números dados e x é uma variável. Costumamos escrever

$$P(x) = ax + b$$

para indicar que x pode assumir valores. Quer dizer que P pode ser entendido como um função e nós podemos então calcular seu valor em um número:

$$P(3) = 3a + b; P(0) = b; P(-1) = b - a; P(1) = a + b.$$

Propriedades das funções do primeiro grau

Uma propriedade fundamental das funções do primeiro grau diz respeito ådiferença. Vejamos o que significa isto.

Seja $f(x) = ax + b$, uma função cuja equação é um polinômio do primeiro grau. Acompanhe as contas que faremos agora, em seguida logo vamos analisar o que fizemos, se você sozinho não chegar às suas próprias conclusões.

Então:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) =$$
$$ax + a\Delta x + b - ax - b = a\Delta x$$

Vamos analisar o que fizemos.

Primeiro usamos o símbolo Δx para representar um *acré scimo*. Assim calculamos o valor da variação de f relativamente ao acréscimo Δx.

O resultado foi que a variação de f é proporcional ao acréscimo. Vamos repetir as contas com uma pequena modificação e em seguida analisaremos o resultado:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) =$$
$$ax + a\Delta x + b - ax - b = a\Delta x.$$
$$\text{Logo, } \Delta f = a\Delta x$$

O acré scimo de f, e o acréscimo da variá vel, se encontram na proporção:

$$\Delta f = a\Delta x.$$

Observe que a variável x desapareceu nas contas. Quer dizer que esta proporção entre Δf e Δx não depende de x. Esta é uma propriedade fundamental das funções do primeiro grau que vamos explorar muito.

Observe na figura (fig. 3.8) página 85,

O símbolo Δ com frequência representa diferenças ou acréscimos, como no presente texto.

A figura (fig. 3.8) página 85, traz o grá fico de uma reta e sugere que este gráfico corresponde åfunção $f(x) = ax + b$. Vamos ver que isto é verdade, que os gráficos de funções lineares afins são retas.

As contas que fizemos acima, associando $\Delta f, \Delta x$ nos dizem que

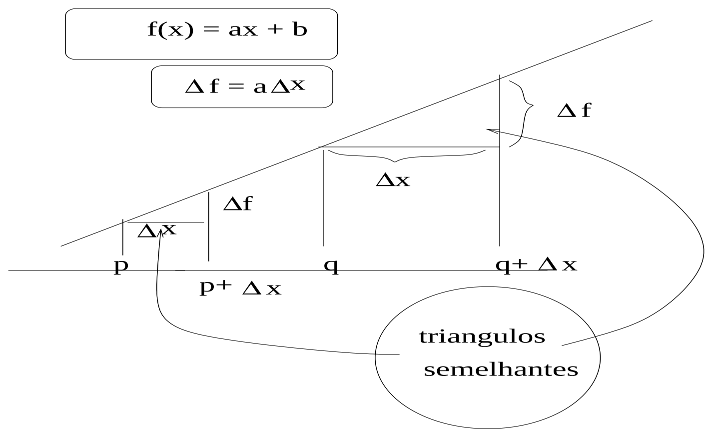

Figura 3.8: Diferença: proporção constante na função do linear afim.

- quando nos afastamos de um ponto $x = p$ com um acréscimo Δx se produz um acréscimo $\Delta f = a\Delta x$ no valor de $y = f(p)$.
- a figura (fig. 3.8) nos diz que é irrelevante o ponto em que isto é feito: no ponto $x = q$ podemos ver outro triângulo semelhante ao primeiro feito quando $x = p$.
- Como os triângulos são semelhantes, *porque os lados são proporcionais*, então as hipótenusas dos mesmos vão ficar sobre uma mesma direção.
- A conclusão a que podemos chegar com estes dados é que a função $y = f(x) = ax + b$ tem como gráfico uma reta.

Demonstramos assim o teorema:

Teorema **23** *Gráfico das funções lineares afins O gráfico das funções lineares afins são retas.*

Como uma reta fica determinada por dois pontos, basta que calculemos dois pontos do gráfico:

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$$

e traçar a reta que passa por estes dois pontos.

Exercícios 15 *Diferenças, gráficos Para cada um dos itens abaixo, faça o gráfico da função e da diferença solicitada.*

1. *Considere* $f(x) = 3x + 2$. *Calcule* Δf *para o acréscimo* $\Delta x = 1$ *quando* $p \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}$.

2. *Considere* $f(x) = -3x + 2$. *Calcule* Δf *para o acréscimo* $\Delta x = 1$ *quando* $p \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}$.
3. *Considere* $f(x) = 3x - 2$. *Calcule* Δf *para o acréscimo* $\Delta x = 1$ *quando* $p \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}$.
4. *Considere* $f(x) = -3x - 2$. *Calcule* Δf *para o acréscimo* $\Delta x = 1$ *quando* $p \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}$.
5. *Considere* $f(x) = 3x + 2$. *Calcule* Δf *para o acréscimo* $\Delta x = 2$ *quando* $p \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}$.
6. *Considere* $f(x) = 3x + 2$. *Calcule* Δf *para o acréscimo* $\Delta x = 3$ *quando* $p \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}$.

O coeficiente angular e coeficiente linear

O número <u>a</u> na equação da função linear afim $f(x) = ax + b$ é o quocientes entre os comprimentos dos catetos de qualquer triângulo obtido, como na figura (fig. 3.8). Isto quer dizer que $a = tg(\alpha)$ em que α é o angulo que a reta faz com o eixo OX.

Observe na figura (fig. 3.9) página 86, o ângulo α e o quociente $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ representados em dois pontos diferentes do gráfico.

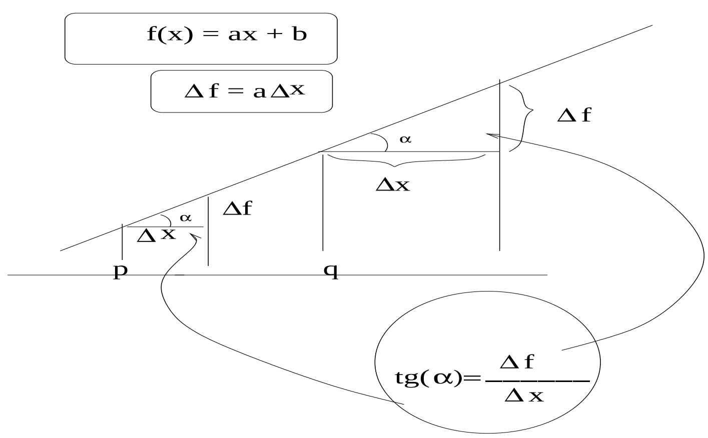

Figura 3.9: a tangente do ângulo α é a.

O outro coeficiente na expressão polinomial que define $f(x) = ax + b$, o número <u>b</u> se chama *coeficiente linear*. Ele é o valor de f no ponto $x = 0$ portanto corresponde àsegunda coordenada do ponto em que a reta $y = ax + b$ corta o eixo OX.

Na figura (fig. 3.10) página 87, você pode ver o gráfico da reta $y = 2x + 1$ observando os pontos em que o gráfico corta os eixos.

O gráfico corta o eixo OY no ponto $(0,1)$, sendo $1 = f(0)$. O ponto em que o gráfico corta o eixo OX é quando $y = 0$. Se substituirmos na equação $y = 2x + 1$ teremos:

$$y = 0 = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Como este ponto foi obtido como solução de uma equação *associada* åfunção $y = f(x)$ dizemos que é*uma* raiz da função.

Como as funções do primeiro grau tem por gráfico uma reta, elas só podem cortar os eixos uma vez (a não se que se confundam com os mesmos). Isto representa um teorema importante: as equações do primeiro grau tem uma única solução:

Teorema 24 *Soluções das equações do primeiro grau As equações do primeiro grau* $ax + b = 0$ *tem uma única solução:*

$$x = -\frac{b}{a}.$$

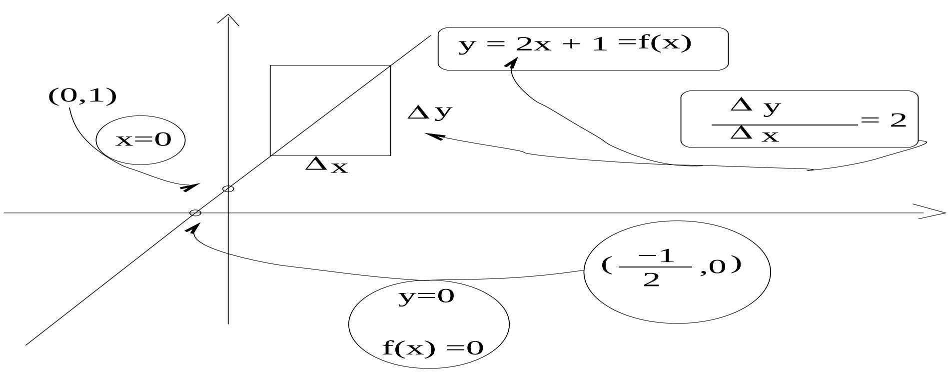

Figura 3.10: Os pontos em que uma função linear afim corta os eixos.

Exercícios 16 *Coeficiente angular da reta*

1. *Trace as retas cujas equação são*

$y = -\frac{1}{2}x + 3$	$y = \frac{x+3}{2}$	$y = \frac{3-x}{3}$	$y = -2x + 1$

2. *Para cada uma das retas do item anterior, marque os pontos em que elas cortam os eixos. Resolva as equações do primeiro grau associadas a cada uma das retas.*

3. *Para cada uma das retas do primeiro item, calcule os valores de $y = f(x)$ quando:*

a) $x = -1$	*b)* $x = 0$	*c)* $x = 1$	*d)* $x = 2$

4. *Para cada equação $y = ax + b$ no primeiro item, calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Observe que que o quociente é o coeficiente angular de cada reta. Desenhe em cada reta um triângulo retângulo dando um valor específico para Δx e escolhendo um ponto $x = p$. Observe o gráfico (fig. 3.8), na página 85.*

5. *Uma reta de coeficiente angular -2 passa no ponto $(-3, 1)$. Encontre a equação desta reta.*

6. *Encontre a equação da reta que passa no pontos*

$$(-3, 0), (2, 5).$$

Função linear

Quando o *coeficiente linear*, na função linear afim é zero, nós chamamos a função polinomial correspondente de *linear*.

Definição 22 *Função linear*
Se em $f(x) = ax + b$ o coeficiente linear, $b = 0$, for zero, a função $f(x) = ax$ é chamada de linear.

Como o coeficiente linear é zero, as funções lineares passam na origem: $f(0) = 0$.
Nos gráficos das funções lineares, sempre podemos escolher um dos triângulos que tem a hipotenusa sobre o gráfico com um dos vértices na origem. Ver na figura (fig. 3.11) página 89,

Nas funções lineares $y = f(x) = ax$ o coeficiente de proporcionalidade se aplica diretamente åvariável para obter o valor da função sem mais outro cálculo.

Exercícios 17 *Funções lineares*

1. *O trabalho de um pedreiro é pago de acordo com $f(t) = at$ em que t representa o tempo em dias e a representa o valor da diária. Quanto vai ganhar o pedreiro em 30 dias de trabalho se a diária vale R\$15,00.*

2. *Um bombeiro hidráulico cobra R\$2,00 por hora (ou fração de hora) de trabalho mais uma taxa de R\$10,00 por visita. Escreva a função do primeiro grau que descreve o preço do seu trabalho num dia, junto a um cliente, e decida se é uma função linear.*

3. *Um bombeiro hidráulico cobra R\$2,00 por hora (ou fração de hora) de trabalho mais uma taxa de R\$10,00 por visita.*

   Como o bombeiro fez tres visitas, tendo na primeira trabalhado durante 2 horas, na segunda 2 horas e meia e na terceira 5 horas, faça o gráfico que descreve o seu rendimento neste dia de trabalho.

   Definição 23 *Progressão Aritmética*
   Uma sucessão $\{a_0, a_1, \ldots a_n\}$ se diz uma progressão aritmética, *"p.a." se a* diferença entre quais quer dois termos sucessivos for constante*:*

$$a_{k+1} = a_k = \Delta$$

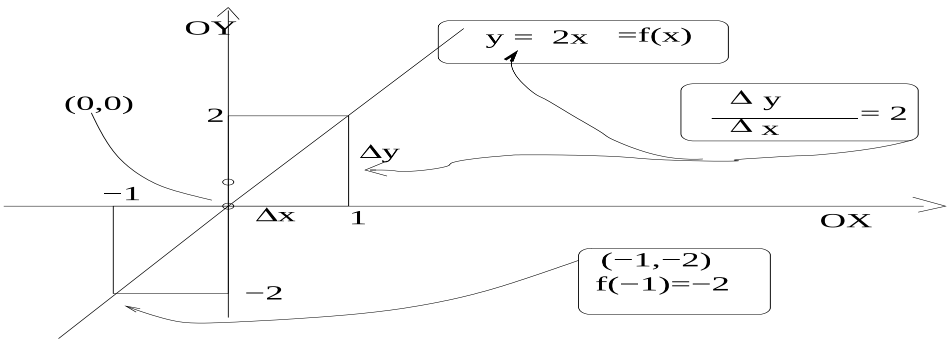

Figura 3.11: A função linear $y = 2x$.

Esta diferença constante é chamada de razão da progressão aritmética.

A expressão a_k *é chamada* termo geral *da p.a.*

4. *Construindo p.a.*
   (a) *Construa uma p.a. com 10 termos tal que* $a_0 = 1$ *e a razão* $\Delta = 2$
   (b) *Construa uma p.a. com 10 termos tal que* $a_9 = 18$ *e a razão* $\Delta = 2$
   (c) *Construa uma p.a. com 10 termos tal que* $a_0 = 1$ *e a razão* $\Delta = -2$
   (d) *Construa uma p.a. com 10 termos tal que* $a_4 = 1$ *e* $a_3 = 2$
5. *Termo geral de uma p.a. Verifique que se a razão de uma p.a. é* Δ *então o seu termo geral pode ser escrito em função do primeiro termo,* a_0 *como*
   $$a_k = a_0 + (k-1)\Delta.$$
   Escreva a expressão do último termo, a_{n-1}.
6. *Numa p.a. com 10 termos o último termo é* $a_9 = 26$. *Determine o termo geral sabendo que* $a_0 = -1$.
7. *Mostre que os ganhos do bombeiro hidráulico (exercício acima) tem seus ganhos definidos por uma p.a. ao longo de um dia de trabalho, em que k é o tempo em horas inteiras, (descontando o tempo que ele leva para se translatar de um cliente a outro)*
8. *Um técnico de TV e vídeocassete cobra 40 reais pela visita e 4 reais pela hora de trabalho (ou fração). Quanto lhe vai render um serviço que tiver durado 2 horas e vinte minutos.*

9. *Em duas cidades A,B, as tabelas de corrida de taxi são definidas assim:*

   (a) *<u>Em A</u> R$2,00 custa o quilómetro rodado (ou fração) e a bandeirada vale R$1,50;*

   (b) *<u>em B</u> R$1,50 custa o quilómetro rodado (ou fração), e a bandeirada vale R$2,00*

   Faça os gráficos das curvas de preço dos taxis nas duas cidades e conclua se o taxi é mais barato em alguma das cidades.

10. *Mostre que o termo geral de uma p.a. pode ser escrito como uma função do primeiro grau:* $f(x) = a + (x-1)b$ *e identifique usando as expressões* a_k, Δ *a razão, o primeiro termo, e o termo geral desta progressão aritmética.*

11. *Mostre que numa p.a. a média aritmética de tres termos consecutivos* a_k, a_{k+1}, a_{k+2} *é* $a_{k+2} = \frac{a_k + a_{k+3}}{2}$.

12. *Encontre* x *sabendo que* $3, x, 10$ *são os termos consecutivos de uma p.a.*

13. *Decida se é verdade:* "os mandatos dos presidentes da república do Brasil, ocorrem segundo uma p.a.*".*

14. *Decida se é verdade, e se for escreva a* p.a. *correspondente:* "as datas em que o cometa Haley se torna visível em nosso horizonte formam uma p.a.*"*

15. *Quantos são os múltiplos de 7 entre 1000 e 2000 ?*

16. *Calcule o valor de* x, y, z *na p.a.*

$$5, x, 13, y, 21, z, 29$$

17. *<u>termos equidistantes</u> Por definição, dizemos que os termos* a_k, a_{n-k} *são termos equidistantes dos extremos numa p.a. Prove que a soma de todos os termos equidistantes é constante, e calcule este valor relativamente a p.a.*

$$a_0, a_1, \ldots, a_n.$$

18. *Fórmula da soma dos termos Deduza do teorema anterior que*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \frac{(a_0 + a_n)n}{2}$$

19. *Considere uma p.a.*

$$a_0, a_1, \ldots, a_n.$$

   com razão Δ*. Uma outra sucessão é obtida, desta, mantendo-se o primeiro e o último termo, mas considerando-se como razão* $\frac{\Delta}{2}$*. Calcule a soma dos termos da nova progressão em termos da soma dos termos da primitiva.*

20. *Numa sucessão o termo geral é* $s_k = ak + b$ *em que* a, b *são dois números dados. Mostre que esta sucessão é uma p.a.*

21. *Calcule a soma dos n primeiros números naturais. Existe alguma diferença no resultado, considerada a polêmica sobre se* o zero é ou não um número natural*?*

22. *Escreva o termo geral da p.a. formada pelos n primeiros números naturais ímpares.*

23. *Numa p.a. de termo geral* a_n *o primeiro termo é* $a_0 = 5$ *e a razão é 2. Escreva a expressão do termo geral e calcule* a_{20}*.*

24. *Numa p.a. tem-se* $a_{10} = 17, a_0 = 13$. *Calcule* a_3, a_5.

25. *Numa p.a* $a_{10} = 17, a_6 = 13$. *Calcule* $a_5 - a_3$.

26. *Calcule a soma dos n primeiros números naturais ímpares.*

27. *Um grupo de pessoas almoçou num restaurante decidindo ao final ratear o custo de $R 240,00 da refeição, quando, quatro pessoas do grupo disseram-se impossibilitadas de participar dos gastos o que aumentou em $R 5,00 o que cada uma das outras teve que pagar. Quantos eram os membros do grupo ?*

   Solução: *Vamos designar por* $\underline{x}$ *o número total de pessoas do grupo e portanto o preço, por pessoa do rateio seria* $\frac{240}{x}$ *ficando este preço acrescido de $R 5,00 quando quatro pessoas não puderam pagar:* $\frac{240}{x} + 5$. *Este é o valor que cada um dos* $x - 4$ *restantes do grupo tiveram que pagar individualemnte, portanto igual a* $\frac{240}{x-4}$. *Isto nos conduz à equação*

$$\begin{aligned} \tfrac{240}{x-4} &= \tfrac{240}{x} + 5 \\ 240x &= 240(x-4) + 5(x-4)x \\ -48.4 + x^2 - 4x &= 0 \\ -192 - 4x + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

   A raiz positiva desta equação é 16, *a outra é* -12 *sendo, portanto, a resposta "eram* 16 *os membros do grupo".*

Definição 24 *Progressão Geométrica*

Uma sucessão $\{a_0, a_1, \ldots a_n\}$ *se diz uma* progressão geométrica, *"p.g." se a* quociente entre quais quer dois termos sucessivos for constante*:*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

Este quociente constante é chamado de razão da progressão geométrica*.*

28. *Mostre que numa p.g. a média geométrica de tres termos consecutivos* s_k, s_{k+1}, s_{k+2} *é* $s_{k+2} = \sqrt{a_k a_{k+3}}$.

29. *Encontre* x *sabendo que* $9, x, 81$ *são os termos consecutivos de uma p.g.*

30. *Fórmula da soma dos termos de uma p.g. Deduza do teorema anterior que*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \frac{(a_0 + a_n)n}{2}$$