Capítulo 3

Espaço Vetorial

Vamos formalizar neste capítulo o espaço de chegada e saída onde as matrizes estão definidas como funções lineares. O conceito "*dimensão*", que vem sendo usado até agora de forma intuitiva, será aqui formalizado.

3.1 O espaço R^2

Já estudamos o $\mathbf{R}^2$ confundido com os números complexos. Agora vamos dar a este espaço a sua identidade própria. No capítulo 1 mostramos o funcionamento geométrico dos números complexos que chamamos de vetores do plano. Fizemos um jogo duplo entre duas notações:

$$\mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2.$$

Neste capítulo vamos nos dedicar exclusivamente ao vetor

$$(c, d) \in \mathbf{R}^2$$

e as propriedade do espaço $\mathbf{R}^2$ de tais vetores.
Registre em sua mente para uso futuro, enquanto estavamos estudando as funções lineares complexas as únicas matrizes que apareceram foram do tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

determinadas apenas por dois números. Esta simples detalhe vai ser muito importante aqui e em outras situações de matemática mais avançada.

3.1.1 A estrutura algébrica de R^2

Podemos identificar as seguintes operações que sabemos fazer com um par $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

- Adição $(x_1, x_2)+(y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$. Como no caso dos complexos, somamos as coordenadas de mesmo índice.

    1. comutatividade A `adição` é comutativa

$$X + Y = Y + X;$$

2. existência do elemento neutro $(0,0)$ é o elemento neutro desta operação

$$X + 0 = X \ ; \ (a,b) + (0,0) = (a,b);$$

3. existência do inverso aditivo $(-x_1, -x_2)$ é o inverso aditivo de (x_1, x_2)

$$(-x_1, -x_2) + (x_1, x_2) = (0,0);$$

4. associatividade da adição A adição é associativa,

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z;$$

Isto torna $(\mathbf{R}^2, +)$ um grupo comutativo.

- Multiplicação por um escalar Qualquer número real λ, (um escalar), pode ser multiplicado por um par ordenado (x,y) de acordo com a regra

$$[\lambda, (x,y)] \mapsto (\lambda x, \lambda y) \in \mathbf{R}^2.$$

1. Vale a associatividade à esquerda

$$\alpha(\lambda(x,y)) = (\alpha\lambda)(x,y)$$

2. o elemento neutro da multiplicação não altera o multiplicando (não podemos dizer que ele é um elemento neutro...)
3. o elemento neutro da adição torna nulo o multiplicando

$$0(x,y) = (0,0)$$

4. Vale a distributividade da multiplicação por um escalar relativamente à soma de vetores

$$\lambda[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] = \lambda(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2)$$

Vemos assim que todas as operação do corpo dos escalares $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ se endcontram envolvidas na nova estrutua que se se chama *espaço vetorial real* . O adjetivo real vem do corpo $\mathbf{R}$ dos números reais. Temos também espaços vetoriais complexos, se o corpo dos escalares for $\mathbf{C}$.

Os exemplos que daremos a seguir são exercícios que o leitor deve fazer. Alguns deles o iraão conduzir a relembrar alguns teoremas do Cálculo.

Exemplo 4 *Espaços vetoriais*

1. *Espaço vetorial real*

   O conjunto $\mathbf{R}[x]$ *dos polinômios a uma variável com coeficientes reais é um* espaço vetorial real. *O leitor curioso deverá verificar que todas as propriedades listadas acima valem.*

2. *Espaço vetorial dos polinômios a coeficientes complexos*

   O conjunto $\mathbf{C}[z]$ *dos polinômios a coeficientes complexos é um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbf{C}$ *dos números complexo, portanto um espaço vetorial complexo.*

3. *Espaço vetorial complexo*

   o conjunto dos números complexos, $\mathbf{C}$ *é um espaço vetorial complexo, assim como* $\mathbf{C}^2$ *o conjunto dos pares ordenados de números complexos.*

4. *Espaço vetorial real*

   O conjuntos dos ternos ordenados, $\{(x, y, z)\ ;\ x, y, z \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^3$ *é um espaço vetorial real.*

5. *Espaço vetorial real*

   O espaço de todas as funções contínuas, definidas no intervalo $[a, b]$ *e tomando valores na reta, (funções reais, contínuas com valores no intervalo* $[a, b]$*) é um espaço vetorial real.*

   Se você trocar "contínua" por "diferenciável" tem outro exemplo de espaço vetorial real. Alguns teoremas típicos do Cálculo são da estrutura de espaço vetorial real que estas funções, tem, por exemplo

   Teorema ***11*** *Soma de funções contínuas*

   A soma de duas funções definidas no $[a, b]$ *e contínuas neste intervalo é uma função contínua definida em* $[a, b]$.

   Troque continuidade por diferenciabilidade e você terá outro teorema conhecido.

O módulo de um vetor do $\mathbf{R}^2$ se calcula de forma idêntica a dos números complexos. O módulo algumas vezes se chama de *norma.*

Definição 12 *Módulo de um vetor do* $\mathbf{R}^2$ *Se* $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ *então* $|(x, y)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *é o tamanho do segmento de reta que vai do ponto* (x, y) *até a origem* $(0, 0)$ *Dizemos*

O próxio laboratório vai exercitá-lo no uso destes conceitos.

Laboratório 11 *Espaço vetorial normado*

1. *cálculo da norma com* scilab *Defina a função* `norma` *no* scilab *e calcule as normas (módulos) dos vetores*

$$u \in \{(1, 3), (3, 4), (-3, 4), (-4, 3), (-3, -4), (0, 3), (4, 0)\}$$

   resposta

```
-->1> u = [1,3]
u =

  1  3

-->2> function y = norma(u)
> y = sqrt(u(1)^2 + u(2)^2)
> endfunction

-->3> norma(u)
ans = 3.1623
-->4>
```

2. *Defina em* scilab *uma função que, recebendo um escalar e um vetor, retorne o produto do vetor pelo escalar e calcule o produto dos vetores*

   $u \in \{3, (1,3), -1, (3,4), -2, (-3,4), 0, (-4,3), 0.5, (-3,-4), -1, (0,3), 4, (4,0)\}$

   pelo escalar que o antecede. *resposta*

```
-->1> u = [1,3]
u =

  1  3

-->2> function v = escalar(s,u)
> v = [s*u(1) , s*u(2)]
> endfunction
-->3> escalar(3,u)
ans =

  3  9
```

3. *Defina em* scilab *uma função que, recebendo um escalar e um vetor, retorne o produto do vetor pelo escalar, mas que o vetor resultante seja um vetor coluna. Calcule o produto dos vetores*

   $u \in \{3, (1,3), -1, (3,4), -2, (-3,4), 0, (-4,3), 0.5, (-3,-4), -1, (0,3), 4, (4,0)\}$

   pelo escalar que o antecede. *resposta*

```
-->1> u = [1,3]
u =

  1  3
```

```
-->2> function v = escalar(s,u)
> v = [s*u(1) , s*u(2)]'
> endfunction
-->3> escalar(3,u)
ans =

  |3 |
  |9 |
```

4. *Verifique que o* scilab *sabe somar vetores calculando* $u+v$ *depois de definir:* $u = [1, 3], v = [2, 4]$ *Verifique que* scilab *calcula o valor de* x *em*

$$x = u - v$$

5. *Considere o conjunto* $\mathcal{E}$ *de todas as funções reais definidas no conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (a) *Prove que* $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

   (b) *Considere* $f \in \mathcal{E}$ *e consequentemente*

   $$f(1), f(2), f(3), f(4), f(4)$$

   são números reais. Defina uma função de

   $$\mathcal{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{R}^5$$

   tal que

   $$f(i) \mapsto x_i = f(i) \ ; x \in \mathbf{R}^5$$

   Prove que

   (a) *<u>Φ é linear</u>*

      i. $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$

      ii. $\Phi(\lambda f) = \lambda\Phi(f) \ ; \forall \lambda \in \mathbf{R}$

   (b) $\Phi(0) = 0$ *em que o argumento de* Φ *tem que ser a função zero (identicamente nula).*

   (c) $\Phi(f) = 0$ *se e somente se* $f = 0$

   (d) *Mostre que* Φ *é bijetiva.*

6. *<u>Produto Interno</u> Definimos em* $\mathbf{R}^2$ *a função*

$$\mathbf{R}^2 \ \text{x} \ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ \mathbf{R}^2 \ \text{x} \ \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$$

que chamamos de produto interno *e para a qual usamos a notação*

$$< x, y >$$

<u>Observação</u> O produto interno é também chamado produto escalar*.*

(a) *bilinearidade do produto interno* Prove que $<>$ é linear em cada uma das variáveis:

i. $x \mapsto < x, y >$ é linear considerado y fixo e

ii. $y \mapsto < x, y >$ é linear considerado x fixo.

(b) *Produto interno e módulo* Considere $u, v \in \mathbf{S}^1$ dois pontos do círculo trigonométrico, então

$$u \equiv (cos(\alpha), sen(\alpha) \ ; \ u \equiv (cos(\beta), sen(\beta)$$

para dois números reais α, β. Calcule o produto interno de u por v e verifique que

$$< u, v >= cos(\theta)$$

sendo θ o ângulo entre u e v

(c) *Produto interno e módulo* Prove que para dois vetores quaisquer $u, v \in \mathbf{R}^2$

$$< u, v >= |u||v|cos(\theta)$$

em que θ é o ângulo entre os dois vetores u, v

7. *regra do paralelograma* Prove, usando semelhança de triangulos, que a regraa do paralelograma corresponde de fato a soma e a diferença álgebrica de dois vetores (uma das diagonais representa a soma, a outra representa a diferença). Explicite tudo.

8. Prove que, dados tres vetores $u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R}^2$ não colineares dois a sois, então existem tres escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ não nulos tal que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

Descreva o significado geométrico desta questão (sugestão, use a palavra "triângulo").

Solução em scilab

```
-->1> function  escala(l,u,v,w)
> -l*det([w(1),w(2);v(1),v(2)])/det([u(1),u(2);v(1),v(2)])
> -l*det([u(1),u(2);w(1),w(2)])/det([u(1),u(2);v(1),v(2)])
> endfunction
-->2> escala(7,[2,2],[3,1],[4,0])
ans = 7
ans = -14
-->3>
```

$$7 * u - 14 * v + 7 * w = 7(2, 2) - 14(3, 1) + 7(4, 0) = 0$$

a ordem dos parâmetro tem significado, o primeiro é um escalar e os três outros são vetores do plano dois a dois não colineares.

Significado geométrico

Dados tres vetores dois a dois não colineares, podemos construir um triângulo com lados paralelos aos vetores dados, e se dado um dos escalares que irá multiplicar um dos lados, podemos encontrar os outros dois escalares.

Veja na figura (fig. 3.1) página 71, um exemplo de tres segmentos de reta não colineares dois a dois e o triângulo que pode ser obtido com eles com a função `escala()`. *A solução não é única, muitos triângulos semelhantes podem assim ser obtidos.*

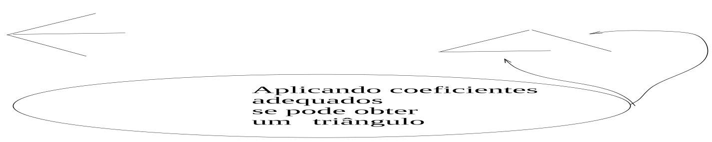

Figura 3.1: três vetores não colineares dois a dois formam um triãngulo

3.2 Dependência linear

Este é um dos conceitos centrais da Álgebra Linear com o qual poderemos definir dimensão. Uma forma intuitiva de compreendê-lo é a seguinte: considere que você tem n informações, mas algumas delas sejam consequência de outras do mesmo conjunto, então você na verdade tem menos do que n informações e o conjunto de informações que você tem é *redundante* o que significa que um conjunto menor de informações lhe diz tudo. Um conjunto de vetores *linearmente dependentes* é um conjunto reduntante e que pode ser reduzido a um conjunto menor que diz tudo sobre o espaço a que eles pertencem. Vamos transformar estas idéias numa *técnica*...

Exemplo 5 *Redundância Começamos por explicar* dependência linear *usando o adjetivo* redundância. *Se este adjetivo não estiver claro, tão pouco terá ficado claro o que é* dependência linear.

Vejamos um exemplo.

Suponha que se deseje calcular a inflação de um determinado mês e que para isto se eleja a cesta básica

feijão, açúcar, arroz, leite, farinha

Levantados os preços (suponha) se verifica que os preços do feijão e da farinha foram exatamente os mesmo em todos os dias do do mês. A cesta básica acima é redundante do ponto de vista do cálculo da inflação[1] *e deveria ser considerada a cesta*

açúcar, arroz, leite, farinha

É isto que vamos fazer aqui, descobrir quais são os conjuntos redundantes *do ponto de vista* de geração de um espaço vetorial por um conjunto de vetores.

Temos que começar definindo o que é *gerar um espaço vetorial.* As combinações lineares de vetores são o instrumento certo.

Definição 13 *Conjunto gerador de um espaço vetorial*

Dizemos que um conjunto

$$b = \{e_1, \cdots, e_n\}$$

é um conjunto gerador de um espaço vetorial $\mathcal{E}$ se todo elemento de $\mathcal{E}$ pode ser obtido como combinação linear dos elementos de **b**

Dizemos também que

$$e_1, \cdots, e_n$$

são geradores de $\mathcal{E}$. Notação

$$[e_1, \cdots, e_n] = [\mathbf{b}] = \mathcal{E}$$

Exemplo 6 *Geradores do $\mathbf{R}^2$*

- *Um conjunto gerador do $\mathbf{R}^2$*

  Vamos mostrar que os vetores

  $$b_1 = \{(1,0), (1,1)\}$$

  geram o $\mathbf{R}^2$, quer dizer que qualquer elemento do $\mathbf{R}^2$ pode ser obtido como combinação linear dos elementos deste conjunto:

$$\text{considere dois escalares } a, b \tag{3.1}$$
$$a(1,0) + b(1,1) = (a+b, b) = (x_1, x_2) \tag{3.2}$$
$$\text{é preciso que } a + b = x_1, b = x_2 \tag{3.3}$$
$$\text{deduzimos que } b = x_2 ea = x_1 - b = x_1 - x_2 \tag{3.4}$$

  portanto com escalares $a = x_1 - x_2, b = x_2$ podemos gerar o elemento genérico $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Mais concretamente

$$a = 3 - 5, b = 5 \Rightarrow (3-5)(1,0) + 5(1,1) = (3,5)$$

[1] a menos que se deseje viciar o resultado ...

- *Um outro conjunto gerador do* $\mathbf{R}^2$

  Vamos agora considerar o conjunto

$$b_2 = \{(1,0),(0,1)\}$$

Queremos mostrar que também qualquer elemento do $\mathbf{R}^2$ *pode ser obtido como combinação linear destes vetores e portanto que não há unicidade nesta escolha.*

Tome um elemento qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

Podemos escrever:

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

o que mostra que um elemento qualquer do $\mathbf{R}^2$ *é uma combinação linear de dos elmentos do conjunto*

$$\{(1,0),(0,1)\}$$

Mais concretamente:

$$3(1,0) + 5(0,1) = (3,5).$$

Portanto

$$b_2 = \{(1,0),(0,1)\}, b_1 = \{(1,0),(1,1)\},$$

são conjuntos geradores de $\mathbf{R}^2$.

- *Um conjunto gerador redundante*

  Vamos mostrar que o conjunto

$$b_3 = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

também serve para gerar o $\mathbf{R}^2$ *mas que neste caso existem informações de sobra.*

$$\text{considere três escalares } a, b, c \tag{3.5}$$
$$a(1,0) + b(0,1) + c(1,1) = (a+c, b+c) = (x_1, x_2) \tag{3.6}$$
$$\text{é preciso que} \tag{3.7}$$
$$a + c = x_1 \tag{3.8}$$
$$b + c = x_2 \tag{3.9}$$
$$\text{donde deduzimos que} \tag{3.10}$$
$$a - b = x_1 - x_2 \Rightarrow a = x_1 - x_2 + b \tag{3.11}$$
$$\text{substituindo na primeira equação} \tag{3.12}$$
$$x_1 - x_2 + b + c = x_1 \tag{3.13}$$
$$c = x_2 - b \tag{3.14}$$

Conclusão, os três escalares a, b, c necessários para gerar

$$(x_1, x_2)$$

a partir de

$$b_3 = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$$

podem ser obtidos de muitas maneiras a partir de uma escolha feita de b. Quer dizer que não é 'unica a forma de gerar

$$(x_1, x_2)$$

a partir de

$$\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$$

porque tem excesso de informação neste conjunto. Aliás, já haviamos visto que o conjunto

$$\{(1,0), (0,1)\}$$

era suficiente para gerar o $\mathbf{R}^2$.

Portanto b_1, b_2, b_3 são geradores de $\mathbf{R}^2$.

O projeto

Os exemplos acima mostraram que um conjunto de geradores não precisa ser único .

O nosso *projeto* agora é encontrar um conjunto ótimo para gerar um espaço vetorial. Este conjunto ótimo será chamado de *base do espaço.* Nós também veremos que mesmo os conjuntos que caracterizamos como *ótimos* tão pouco serão únicos a quantidade dos elementos da *base* será 'unica e irá caracterizar a dimensão do espaço.

3.2.1 Dependência linear

Em Álgebra Linear, *redundância* significa *Dependência linear.*

Definição 14 *Dependência linear Um conjunto de n vetores é dito* linearmente dependente *se um dos vetores do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais.*

Alguns exemplos.

Exemplo 7 *Vetores linearmente dependentes*

1. *O conjunto de vetores $E = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ é linearmente dependente no $\mathbf{R}2$ por que*

   $$(1,1) = (1,0) + (0,1)$$

   e portanto o vetor $(1,1)$ pode ser escrito como combinação linear dos outros dois.

2. *Dois vetores colineares são linearmente dependentes porque um deles é combinação linear do outro (uma combinação liner) unitária, (lembre-se do fatorial de zero...) Melhor, dois vetores colineares se encontram sobre uma mesma reta (passando pela origem, porque?).*

   (a) *Eles podem ter mesmo sentido, e então existe um escalar positivo permitindo passar de um para o outro, veja na figura (fig. 3.2) página 75, os vetores colineares de mesmo sentido, u, v e os vetores colineares, mas de sentidos inversos, w, z.*

   Em ambos os casos temos a combinação linear

$$u = rv \; ; \; w = sz$$

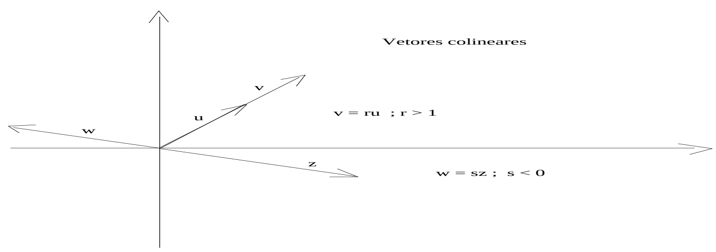

Figura 3.2: Vetores colineares são linearmente dependentes

   (b) *Um dos exercícios que você fez (!) estabelecia que se fossem dados tres vetores não colineares dois a dois no plano, seria possivel com eles montar um triângulo e portanto a resultante destes vetores (com escalares adequadamente escolhidos) seria nula:*

$$\lambda u + \alpha v + \gamma w = 0 \tag{3.15}$$

$$w = -\frac{\lambda}{\gamma}u - \frac{\alpha}{\gamma}v \tag{3.16}$$

   a segunda linha é possível se $\lambda \neq 0$ e isto é sempre possível se os vetores não forem colineares dois a dois.

   Podemos tirar a hipótese restritiva de que os vetores não sejam colineares dois a dois, o que pode resultar num triângulo degenerado, *um triângulo que fique em cima de uma reta (lembre-se do fatorial de zero...). Neste caso um dos escalares da combinação linear pode ser* *zero e o caso dos tres vetores recai simplesmente no item anterior: vetores colineares.*

O seguinte resultado é usado como definição de *linearmente dependente.*

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **12** *Dependência linear*

Seja $E\{u_1, u_2, \cdots u_n\}$ *um conjunto de vetores* linearmente dependente*, então existe uma combinação linear não trivial tal que*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 + u_2 + \cdots \lambda_n u_n = 0$$

$\boxed{\textbf{Dem}}$: *Por combinação linear trivial entendemos aquela em que todos os coeficientes são nulos.*

Se é assim então, como alguma dos escalares é diferente de zero, seja, sem restringir a generalidade, λ_1*, temos*

$$u_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_1} u_k$$

e u_1 *pode ser escrito como combinação linear dos demais.*

Reciprocamente, se algum dos vetores, por exemplo u_1 *puder ser escrito como combinação linear dos demais então podemos escrever a combinação linear não trivial*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 + u_2 + \cdots \lambda_n u_n = 0$$

Isto mostra, como pretendiamos, que o resultado é equivalente a definição de dependência linear*.*

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Enfim, se um conjunto de vetores for *linearmente dependente*, por definição, pelo menos um dos vetores do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais, então o conjunto é reduntante. Então este vetor que pode ser escrito em termos dos outros pode ser retirado do conjunto uma vez que os outros já o representam. Vamos partir desta iéia para montar o conceito inverso de dependência linear.

Suponhamos que do conjunto de vetores

$$E\{u_1, u_2, \cdots u_n\}$$

se tenha tirado toda a redundância possível e portanto nenhum vetor do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais. Então pelo teorema acima a combinação linear

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 + u_2 + \cdots \lambda_n u_n = 0$$

só pode ser a trivial: os escalares todos são zeros. Assim temos a definição do conceito inverso de *dependência linear*:

Definição 15 *Independência linear Um conjunto de vetores*

$$E\{u_1, u_2, \cdots u_n\}$$

é linearmente independente *se e somente se*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 + u_2 + \cdots \lambda_n u_n = 0$$

for a combinação linear trivial: todos os coeficientes são nulos.

Exemplos

Um critério prático para testar se uma coleção de vetores é linearmente independente consiste em

- Escrever uma combinação linear nula dos vetores;
- Verificar se a solução dos sistema, as variáveis são os escalares-oeficientes da combinação linear, é a trivial (zero).

Exemplo 8 *Conjuntos linearmente independentes*

1. *Polinômios Um resultado muito usado na Escola Secundária diz que se um polinômio for identicamente nulo*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv 0$$

então todos os coeficientes são nulos.

Porque os vetores

$$x^n, x^{n-1}, \cdots, x, 1$$

são linearmente independentes. Um polinômio de grau k não pode ser escrito como combinação linear de polinômios de grau diferente de k.

2. *Qual é o significado de uma equação Uma equação, por exemplo*

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \equiv x^2 = 2x + 15$$

somente é verdadeira para um número finito de valores da incongnita. Numa equação do grau n, para exatamente n valores da incógnita (no caso de polinômios sobre o corpo dos complexos). Ou seja

$$x^2 - 2x - 15 \not\equiv 0.$$

mas $x^2 - 2x - 15 = 0$ é verdadeira para $x \in \{-3, 5\}$. Insistindo, os vetores $x^2, x, 1$ não são linearmente dependentes.

3. *Dois vetores não colineares Dois vetores não colineares são linearmente independentes.*

4. *Três vetores não colineares no plano são linearmente dependentes, ver exercício 8, 70. A resultante é necessáriamente nula.*

5. *Três vetores não colineares no "espaço" não precisam ser linearmente dependentes. Porque suas coordenadas são a matriz de um sistema de equações.*

Considere os tres vetores, u_1, u_2, u_3 e uma combinação linear nula deles:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \qquad (3.17)$$

$$\begin{cases} u_{11}\lambda_1 + u_{12}\lambda_2 + u_{13}\lambda_3 & = 0 \\ u_{21}\lambda_1 + u_{22}\lambda_2 + u_{23}\lambda_3 & = 0 \\ u_{31}\lambda_1 + u_{32}\lambda_2 + u_{33}\lambda_3 & = 0 \end{cases} \qquad (3.18)$$

$$\textit{Se det}(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}) \neq 0 \tag{3.19}$$

$$\textit{então o sistema tem solução única} \tag{3.20}$$

e como o sistema é homogêneo, a solução única é zero.

Podemos enunciar um outro critério prático para verificação da independência linear de uma coleção de vetores:

Teorema **13** *Independência linear*
Uma coleção de vetores

$$u_1, \cdots, u_n$$

é linearmente independente se $\det(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$

Dem *: Porque o sistema de equação lineares cuja matriz for as coordenadas dos vetores*

$$u_1, \cdots, u_n$$

terá solução única. **q.e.d .**

As expressões *linearmente dependente* e *linearmente independente* são comumente abreviadas usando-se as iniciais: *l.d.,l.i.*.

3.3 Dimensão

Há algum tempo estamos falando de *geradores* de um espaço. Agora temos as condições necessárias para deixar esta questão fechada.

As combinações lineares de um conjunto de vetores geram alguma coisa, um espaço de vetores, um espaço vetorial. Se a coleção de vetores for ótima, (não redundante), linearmente independente, então o número de elementos desta coleção é uma característica do espaço chamada `dimensão.`

Definição 16 *Dimensão*
A dimensão de um espaço vetorial é o número de vetores linearmente independentes necessários para gerá-lo.

Exemplo 9 *Dimensão*

1. *O plano tem dimensão dois Porque três vetores no plano são l.d., veja exercício 8, 70.*

2. *O espaç 3D tem dimensão três Porque dois vetores são insuficientes para gerar o espaç que convencionamos chamar de 3D. Quatro vetores no espaço 3D são l.d. Consequentemente o número exato de vetores necessários para gera o espaço 3D é três vetores l.i.*

3. *A dimensão é um número ótimo* *Para cada espaço vetorial existe um número ótimo de vetores l.i. que o geram. Qualquer conjunto de dois vetores l.i. geram o plano. Qualquer conjunto de três vetores l.i. geram o espaço 3D. Dizer que um espaço é de dimensão n significa que é necessário um conjunto de n vetores l.i. para gerá-lo.*

4. *Espaço de dimensão quatro* *Considere o conjunto seguinte de polinômios:*

$$E = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x + x2 + x^3, x^3, x^2 + x^3\}$$

O conjunto consiste de 6 vetores, e a pergunta é: qual é a dimensão do espaço que eles geram? *Para responder a esta pergunta o primeiro passo é verificar se o conjunto é l.i. e se não for, extrair deles vetores excedentes, torná-lo não redudante. Uma rápida inspecção nos chama atenção de que existe mais de um polinômio contendo x^3 o que é indício de que o conjunto é l.d. Verificando, vamos colocar os vetores do conjunto de geradores entre parêntesis para deixar claro o que estamos fazendo.*

$$x + x^2 + x^3 = (x^2) + (x^3) + (1 + x) - (1) \tag{3.21}$$

o que mostra que o vetor $x + x^2 + x^3$ pode ser escrito como combinação linear de quatro outros elementos do conjunto E. Portanto E não é um conjunto l.d. de vetores. Retirando $x + x^2 + x^3$ do conjunto e temos:

$$E_2 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x^3, x^2 + x^3\}$$

Por razão semelhante identificamos outro polinômio que pode ser retirado do conjunto:

$$x^2 + x^3 = (x^3) + (1 + x + x^2) - (1 + x)$$

e assim vamos obter

$$E_3 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x^3\}$$

Agora nenhum dos vetores de E_3 pode ser escrito como combinação linear dos demais, sendo então o conjuntoE_3 l.i. e assim gerando um espaço vetorial de dimensão 4. O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 3 é um espaço vetorial de dimensão 4.

5. *Espaço de polinômios* *Vamos resolver a questão anterior de forma diferente,usando diretamente a definição de dependência linear. Primeiro escrevemos a combinação linear dos elementos de E (colocamos os "geradores" entre parêntesis), depois rearrumamos a expressão de acordo com as potências de x (equivalência de expressões algébricas).*

$$\begin{gathered}\lambda_1(1) + \lambda_2(1 + x) + \lambda_3(1 + x + x^2) + \\ +\lambda_4(x + x^2 + x^3) + \lambda_5(x^3) + \lambda_6(x^2 + x^3) = 0\end{gathered}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)x +$$
$$+(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6)x^2 + (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)x^3 \equiv 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 & = 0 \\ \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_6 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_5 \\ \lambda_2 = \lambda_6 \\ \lambda_1 = \lambda_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

que reduz as variáveis a apenas três.

Observe que as variáveis são os números λ_i e que os polinômios são os dados do problema, e portanto as constantes*.*

O sistema de equações fica reduzido a uma equação para a qual podemos encontrar a solução particular

$$\lambda_1 = 0 \; ; lambda_2 = 1 \; ; \; \lambda_3 = -1$$

donde deduzimos que, não necessáriamente:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

portanto o conjunto de vetores

$$E = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x + x2 + x^3, x^3, x^2 + x^3\}$$

é l.d.

Este método não conduz à resposta imediata sobre a dimensão do espaço gerado pelos vetores, mas uma prática na solução de sistema lineares permite deduzir qual a dimensão diretamente deste resultado, como veremos depois. No momento não resta outra saída que descobrir quais os vetores que podem ser escrito como combinação linear dos outros e retirá-los do conjunto E como já fizemos anteriormente.

Exercícios 4 *Dependência linear*

1. *Para que valores de $\underline{a}$ os vetores*

$$(a, 3, 6), (1, a, -2), (0, -1, 2)$$

são linearmente dependentes.

2.

3.

Falamos até agora em conjunto gerador de um espaço vetorial e mencionamos a dimensão. Agora vamos aprender a calcular a dimensão de um espaço vetorial
Os exemplos que desenvolvemos mostram que podemos ter vários geradores para um espaço vetorial, os polinômios de grau menor ou igual a três podem ser gerados por

$$E_1 = \{1, x, x^2, x^3\} \tag{3.22}$$
$$E_2 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x^2 + x^3\} \tag{3.23}$$
$$E_3 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^3, 1 + x + x^2, x^3, x^2 + x^3\} \tag{3.24}$$

e nós queremos descobrir qual é o conjunto gerador ótimo. Veremos, e inclusive a heurística nos ensina isto, o ótimo é relativo a conjunto de fatores. E neste caso vamos ver que existem vários geradores ótimos, mas eles terão algo em comum que chamamos *dimensão*.

3.4 O R^4 tem dimensão quatro

Entendemos que o $\mathbf{R}^4$ é o espaço *abstrato* que serve de modelo para o espaço físico em que vivemos (o espaço-tempo). Consequentemente desejamos poder "medir" este espaço ou "registrar" posições em quatro "eventos" independentes que chamamos *largura*, *profundidade*, *altura* e *tempo* (ou outros nomes quaisquer que tenham um significado comum com estes).

Da Física nos vêm o conjunto de vetores

$$\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

que podemos mostrar que é um conjunto l.i.

$$\lambda 1 e_1 + \lambda 2 e_2 + \lambda 3 e_3 \lambda 4 e_4 = 0 \tag{3.25}$$
$$\lambda 1(1, 0, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, 0) + \lambda_3 = (0, 0, 1, 0) + \lambda_4 = (0, 0, 0, 1) = 0 \tag{3.26}$$
$$(\lambda 1, 0, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0, 0) + (0, 0, \lambda_3, 0) + (0, 0, 0, \lambda_4) = 0 \tag{3.27}$$
$$\lambda 1 = \lambda 2 = \lambda 3 = \lambda 4 = 0 \tag{3.28}$$

e podemos mostrar que todo elemento de $\mathbf{R}^4$ pode ser obtido como combinação linear dos elementos de E

$$\mathbf{R}^4 \ni (a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k e_k \tag{3.29}$$
$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (\lambda 1, 0, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0, 0) + (0, 0, \lambda_3, 0) + (0, 0, 0, \lambda_4) = 0 \tag{3.30}$$
$$\lambda 1 = a_1; \lambda 2 = a_2; \lambda 3 = a_3; \lambda 4 = a_4 \tag{3.31}$$

Podemos também mostrar que um conjunto com mais do que quatro vetores, em $\mathbf{R}^4$ será l.d. Considere um conjunto formado por cinco vetores

$$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbf{R}^4 \ ; \ v_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4})$$

e vamos testar a combinação linear trivial destes vetores, tomamos 5 escalares arbitrários (as variáveis deste problema)

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = 0 \tag{3.32}$$

$$\begin{gathered}(\lambda_1 v_{11}, \lambda_1 v_{12}, \lambda_1 v_{13}, \lambda_1 v_{14}) + \\ (\lambda_2 v_{21}, \lambda_2 v_{22}, \lambda_2 v_{23}, \lambda_2 v_{24}) + \\ (\lambda_3 v_{31}, \lambda_3 v_{32}, \lambda_3 v_{33}, \lambda_3 v_{34}) + \\ (\lambda_4 v_{41}, \lambda_4 v_{42}, \lambda_4 v_{43}, \lambda_4 v_{44}) + \\ (\lambda_5 v_{51}, \lambda_5 v_{52}, \lambda_5 v_{53}, \lambda_5 v_{54}) = 0\end{gathered} \tag{3.33}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} v_{11}\lambda_1 + v_{21}\lambda_2 + v_{31}\lambda_3 + v_{41}\lambda_4 + v_{51}\lambda_5 & = 0 \\ v_{12}\lambda_1 + v_{22}\lambda_2 + v_{32}\lambda_3 + v_{42}\lambda_4 + v_{52}\lambda_5 v_{52} & = 0 \\ v_{13}\lambda_1 + v_{23}\lambda_2 + v_{33}\lambda_3 + v_{43}\lambda_4 + v_{53}\lambda_5 & = 0 \\ v_{14}\lambda_1 + v_{24}\lambda_2 + v_{34}\lambda_3 + v_{44}\lambda_4 + v_{54}\lambda_5 & = 0 \end{array}\right. \tag{3.34}$$

Podemos escalonar este sistema, considerando de cada uma equação e multiplicando o seu primeiro coeficiente não nulo pelas equações que fiquem abaixo, somando duas a duas e substituindo a soma por cada uma das equações. Antes vamos escrever somente a matriz do sistema (a variável não vale mesmo nada...) para economisar espaço e fazer o escalonamento apenas na matriz do sistema. Não precisamos nos preocupar com a matriz dos termos independentes (matriz dos dados) pois são todos zeros e as combinações lineares feitas com eles resultarão em outros tantos zeros. É o que acontece com sistemas homogêneos. Quando o sistema não for homogêneo temos que acoplar a matriz dos dados, uma coluna a mais, para acompanhar com ela as combinações lineares feitas com o resto da matriz, linha por linha. Este não é o caso aqui.

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Anulando o primeiro termo de todas as lilnhas a partir da segunda:

$$\begin{pmatrix} v_{12}v_{11} & v_{12}v_{21} & v_{12}v_{31} & v_{12}v_{41} & v_{12}v_{51} \\ -v_{12}v_{11} & -v_{22}v_{11} & -v_{32}v_{11} & -v_{42}v_{11} & -v_{52}v_{11} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

com a hipótese de $v_{11} \neq 0$. Se $v_{11} = 0$ permutamos todas as colunas da matriz até encontrar um elemento diferente de zero na primeira posição. Se isto não for possível, quer dizer que $v_1 = 0$ e aí o conjunto de vetores já 'e l.d. (um conjunto de vetores contendo o zero é l.d.)

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ 0 & (v_{12}v_{21} - v_{11}v_{22}) & (v_{12}v_{31} - v_{11}v_{32}) & (v_{12}v_{41} - v_{11}v_{42}) & (v_{12}v_{51} - v_{11}v_{52}) \\ 0 & (v_{13}v_{21} - v_{11}v_{23}) & (v_{13}v_{31} - v_{11}v_{33}) & (v_{13}v_{41} - v_{11}v_{43}) & (v_{13}v_{51} - v_{11}v_{53}) \\ 0 & (v_{14}v_{21} - v_{11}v_{24}) & (v_{14}v_{31} - v_{11}v_{34}) & (v_{14}v_{41} - v_{11}v_{44}) & (v_{14}v_{51} - v_{11}v_{54}) \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

Podemos renomear os coeficientes constantes da equação acima, é assim que se faz num programa de computação, e mesmo em textos de Matemática: "fazendo"

$$\begin{array}{l} v_{22} = (v_{12}v_{21} - v_{11}v_{22}) v_{32} = (v_{12}v_{31} - v_{11}v_{32}) v_{42} = (v_{12}v_{41} - v_{11}v_{42}) v_{52} = (v_{12}v_{51} - v_{11}v_{52}) \\ v_{23} = (v_{13}v_{21} - v_{11}v_{23}) v_{33} = (v_{13}v_{31} - v_{11}v_{33}) v_{43} = (v_{13}v_{41} - v_{11}v_{43}) v_{53} = (v_{13}v_{51} - v_{11}v_{53}) \\ v_{24} = (v_{14}v_{21} - v_{11}v_{24}) v_{34} = (v_{14}v_{31} - v_{11}v_{34}) v_{44} = (v_{14}v_{41} - v_{11}v_{44}) v_{54} = (v_{14}v_{51} - v_{11}v_{54}) \end{array}$$

Podemos voltar a utilizar a mesma expressão simples da matriz incial para voltar a fazer as contas (e dentro de um programa este processo de re-utilização das variáveis acontecem dentro de um `laço` ao fim do qual a matriz fica escalonada) veja `sistema.pas` em [13]. Teremos então

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ 0 & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ 0 & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ 0 & v_{24} & v_{34} & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

e vamos aplicar a esta matriz o mesmo *processo* para anular suas entradas na segunda coluna a partir da terceira linha:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ 0 & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ 0 & 0 & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ 0 & 0 & v_{34} & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

à qual vamos aplicar o mesmo *processo* para anular as entradas da terceira coluna a partir da quarta linha:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ 0 & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ 0 & 0 & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ 0 & 0 & 0 & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

Podemos agora repor as variáveis λ_i (necessidade psicológica) para resolver o sistema. Basta fazê-lo, para os nossos propósitos, com a última equação com a qual teremos:

$$v_{44}\lambda_4 + v_{54}\lambda_5 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = -\frac{v_{54}}{v_{44}}\lambda_5$$

se $v_{44} \neq 0$ Se $v_{44} = 0$ então $\lambda_5 = 0$ e λ_4 é qualquer, portanto não necessáriamente zero, e a conclusão foi atingida, o sistema não necessáriamente tem a solução única

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

ou ainda tem uma soluçãn *não trivial* o que significa, pela definição de *dependência linear* que o cinco vetores no $\mathbf{R}^4$ são l.d. como queriamos mostrar.

A principal conclusão aqui é que o maior número de vetores l.i. no $\mathbf{R}^4$ é quatro, consequentemente qualquer conjunto de geradores deste espaço formado de vetores l.i. terá quatro vetores. É isto que caracteriza a dimensão de $\mathbf{R}^4$ como sendo quatro. Demonstramos assim

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **14** *A dimensão do* $\mathbf{R}^4$ *A dimensão do espaço vetorial*$\mathbf{R}^4$ *sobre o corpo dos números reais, é quatro.*

Observação 7 *O padrão* `lico` *para índices de matrizes É preciso comentar que desobedecemos o padrão* `lico` *na denominação (índices) da matriz do sistema. Fomos forçados a isto pela notação dos vetores* v_i*. Mas sempre que possível se evita fazer isto, aqui teria tornado a notação, inútilmente, mais complicada.*

A maneira de evitar isto teria sido definir uma matriz $A = V^t$ *em que* $V = (v_{ij})_{ij}$*. Preferimos, momentâneamente, desobedecer o padrão.*

3.5 O $\mathrm{R}_3[x]$ tem dimensão quatro

Já sabemos, ver exercício (ex.4), página 79, que o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a três tem dimensão 4. Mas ainda restam alguns formalismos para serem preenchidos.

$\mathbf{R}_3[x]$ é o espaço vetorial dos polinômios com grau menor ou igual a 3. Temos que começar mostrando que $\mathbf{R}_3[x]$ é um espaço vetorial.

1. <u>A adição</u> obedece às regras da adiç ao de expressões algébricas o que torna intuitivo que tem todas as propriedades que se espera para adição de números e vamos assim nos poupar de demontrações que *parecem inúteis.* Mas o leitor desejoso de se aprofundar deve aceitar mal esta proposta e deve mostrar que $(\mathbf{R}_3[x], +)$ é um grupo comutativo.

2. <u>A multplicação por um escalar</u> Quando multiplicarmos um polinômio por um escalar, a alteração se dá apenas nos coeficientes, é a regra algébrica. Vamos escrever isto formalmente:

$$\lambda a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \tag{3.41}$$
$$= \lambda a_3x^3 + \lambda a_2x^2 + \cdots + \lambda a_1x + \lambda a_0 \tag{3.42}$$

   Consequentemente o grau do polinômio é mantido e portanto a multiplicação por um escalar real produz um elemento de $\mathbf{R}_3[x]$.

   Na *prática* (e você vai logo ver que é muito mais do que isto), ao multiplicar o escalar λ pelo polinômio

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

   tudo se passa como se estivessemos multiplicando o escalar λ pela ênupla

$$(a_3, a_2, a_1, a_0)$$

que é um elemento de $\mathbf{R}^4$.

Consequentemente as propriedades da multiplicação (assim como as propriedades da adição) têm uma demonstração semelhante às que fizemos na página 66. Vamos rapidamente mostrar isto:

(a) Vale a associatividade à esquerda

$$\alpha(\lambda(P(x)) = (\alpha\lambda)P(x)$$

porque,

$$\begin{aligned}
\alpha(\lambda P(x)) &= & (3.43)\\
\alpha(\lambda(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) &= & (3.44)\\
\alpha(\lambda a_3x^3 + \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0) &= & (3.45)\\
(\alpha\lambda)a_3x^3 + (\alpha\lambda)a_2x^2 + (\alpha\lambda)a_1x + (\alpha\lambda)a_0) &= & (3.46)\\
(\alpha\lambda)P(x) & & (3.47)
\end{aligned}$$

(b) o elemento neutro da multiplicação não altera o multiplicando (não podemos dizer que ele é um elemento neutro...) porque

$$1 \cdot P(x) = 1 \cdot (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = P(x)$$

(c) o elemento neutro da adição torna nulo o multiplicando porque todos os coeficientes são anulados.

(d) Vale a distributividade da multiplicação por um escalar relativamente à soma de vetores porque

$$\begin{aligned}
P(x) = a_{31}x^3 + a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{01} & \quad (3.48)\\
Q(x) = a_{32}x^3 + a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02} & \quad (3.49)\\
P(x) + Q(x) = & \quad (3.50)\\
(a_{31} + a_{32})x^3 + (a_{21} + a_{22})x^2 + (a_{11} + a_{12})x + (a_{01} + a_{02}) & \quad (3.51)\\
\lambda(P(x) + Q(x)) = & \quad (3.52)\\
= \lambda(a_{31} + a_{32})x^3 + & \quad (3.53)\\
+\lambda(a_{21} + a_{22})x^2 + & \quad (3.54)\\
+\lambda(a_{11} + a_{12})x + & \quad (3.55)\\
+\lambda(a_{01} + a_{02}) = & \quad (3.56)\\
= (\lambda a_{31} + \lambda a_{32})x^3 + & \quad (3.57)\\
+(\lambda a_{21} + \lambda a_{22})x^2 + & \quad (3.58)\\
+(\lambda a_{11} + \lambda a_{12})x + & \quad (3.59)\\
+(\lambda a_{01} + \lambda a_{02}) = & \quad (3.60)\\
= (\lambda a_{31}x^3 + \lambda a_{21}x^2 + \lambda a_{11}x + \lambda a_{01}) + & \quad (3.61)\\
+(\lambda a_{32}x^3 + \lambda a_{22}x^2 + \lambda a_{12}x + \lambda a_{02}) = & \quad (3.62)\\
\lambda P(x) + \lambda Q(x) & \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Provamos

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **15** $\mathbf{R}_3[x]$ *é um espaço vetorial*

O exercício (ex.4), página 79 termina agora o nosso projeto, $\mathbf{R}_3[x]$ é um espaço vetorial de dimensão *pelo menos* quatro, porque tem um conjunto linearmente independentes, com quatro vetores e cinco vetores serão linearmente dependentes.

Podemos agora definir *dimensão*.

Definição 17 *Dimensão de um espaço vetorial A dimensão de um espaço vetorial é o número máximo de vetores lnearmente independentes que é possível selecionar no espaço.*

Infelizmente não podemos sempre calcular a dimensão de um espaço vetorial, o exemplo mais simples para isto é o espaço vetorial de todos os polinômios a coeficientes reais $\mathbf{R}[x]$. Vamos caracterizar isto de uma forma que não é precisa, mas é a única de que podemos lançar mão no momento:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **16** *O espaço vetorial* $\mathbf{R}[x]$ *não é dimensão finita.* $\boxed{\textbf{Dem}}$*:*
O conjunto de vetores

$$1, x, \cdots, x^n$$

é linearmente independente, para que todo $n \in \mathbf{N}$*. Consequentemente não podemos escolher um número natural como dimensão de* $\mathbf{R}[x]$*.* $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Não dissemos que a dimensão de $\mathbf{R}[x]$ <u>é infinita</u> porque o infinito não é singular... há vários tipos de infinito!

Laboratório 12 *dimensão*

1. *Complete o conjunto*

$$\mathcal{E} = \{1 + x, 1 + x^2, x^2 + x^5\}$$

   para obter uma base para o espaç$\mathbf{R}_5[x]$ *dos polinômios de grau menor u igual a 5.*

2. *Verifique se o conjunto dos polinômios de grau exatamente 5 é um espaço vetorial.*

3. *Verifique se o conjunto das funções reais definidas no conjunto* $\{a, e, i, o, u\}$ *é um espaço vetorial e encontre uma base para este espaço.*

4. *Considere o sistema de equações*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 & = 0 \end{array} \right.$$

(a) *Prove que o conjunto das soluções deste sistema de equações é um espaço vetorial.*

(b) *Verifique que os "escalares"* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *combinados com os vetores-coluna, da matriz do sistema, geram o espaço solução deste sistema. Calcule a dimensão do espaço solução.*

(c) *Verifique que o sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = b_1 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 & = b_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 & = b_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = b_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 & = b_5 \end{cases}$$

somente pode ter solução se o vetor $\vec{b}$ *de dados pertencer ao espaço gerado pelos vetores-linha da matriz do sistema.*

5. *Mostre que o conjunto-solução da equação diferencial*

$$y'' + a_0 y' + a_1 y = 0$$

é um espaço vetorial. Observe que não se lhe pede que resolva a equação.

(em outras palavras, qualquer solução do sistema é uma combinação linear de no máximo cinco escalares com os vetores-coluna da matriz do sistema).

3.6 Isomorfismo

Vamos desenvolver, nesta seção um exemplo, a semelhança entre

$$\mathbf{R}^4 \text{ e } \mathbf{R}_3[x]$$

de que já falamos algumas vezes. Vamos finalmente dizer porque e como estes dois espaços são semelhantes.
Ao longo da discussão do exemplo, iremos tirando a *teoria geral das relações de equivalência entre espaços vetoriais* o *isomorfismo*.
Finalmente vamos enunciar uma grande relação de equivalência entre os espaços que vai colocar os espaços $\mathbf{R}^n$ como os representantes de todos eles, ou os $\mathbf{C}^n$ se você preferir os espaços vetoriais complexos. Claro há ainda alguns que ficarão de fora, os espaços de dimensão não finita, mas esta é uma outra história, ou será outro livro...

3.6.1 O isomorfismo $\mathbf{R}^4 \equiv \mathbf{R}_3[x]$

Os espaços $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}_3[x]$ são equivalentes, e a equivalência entre espaços vetoriais se chama *isomorfismo*:

Definição 18 *isomorfismo*

Dados dois espaços vetoriais, E, F se pudermos estabelecer entre eles uma função

$$T : E \longrightarrow F$$

que seja linear

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \ ; \ T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

e T seja uma bijeção, então dizemos que os espaços vetoriais E, F são isomorfos.

Observe que esta relação é *recíproca*, o que está implícito na afirmação "E, F são isomorfos". Quer dizer, se E é isomorfo a F então Fé isomorfo a E. No âmago desta questão se encontra que T, T^{-1} são lineares. Isto precisa ser demonstrado.

Consideremos o isomorfismo

$$T : E \longrightarrow F$$

e a função inversa

$$T^{-1} : F \longrightarrow E$$

que é bijetiva.

Tome agora a combinação linear

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in F \ ; \ y_i T(x_i)$$

mas

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \tag{3.64}$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \tag{3.65}$$

$$\tag{3.66}$$

mostrando a linearidade de T^{-1} que é assim um isomorfismo.

Teorema **17** *Propriedade I das funções lineares*

Se $T : E \longrightarrow F$ for linear, então

$$T(0) = 0$$

Dem *:*

$$0 = 0 + 0 \Rightarrow T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$$

o que prova que $T(0)$ é o elemento neutro da adição de vetores, o vetor zero: $T(0) = 0$

q.e.d .

A função $T : \mathbf{R}_3[x] \longrightarrow \mathbf{R}^4$ se define por

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

transformando um polinômio na matriz dos seus coeficientes.

Como a soma de polinômios se faz somando os coeficientes, então

$$T(x+y) = T(x) + T(y).$$

Como multiplicar um polinômio por um número real consiste em multiplicar cada coeficiente pelo escalar, então

$$T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

Mostramos que a função que associa um polinômio à matriz dos seus coeficientes, na mesma ordem,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

é linear[2].

Falta mostrar que esta função linear é bijetiva, (injetiva e sobrejetiva). Vamos dar um salto *abstrato* e demonstrar um teorema que resolve rapidamente esta questão sempre que precisarmos dela. Continuaremos usando a notação acima, mas estaremos pensando agora em espaços E, F genéricos.

Considere dois vetores $x, y \in E$, temos

$$T(x) = T(y) \equiv T(x-y) = 0 \quad (3.67)$$

$$\text{como } T(0) = 0 \text{ então } x - y = 0 \equiv x = y \quad (3.68)$$

Demonstramos a implicação

$$T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$$

que é equivalente a

$$x \neq y \Rightarrow T(x) \neq T(y)$$

que significa que T é injetiva. Mostramos assim o teorema

Teorema 18 *Propriedade II das funções lineares* *Critério de injetividade para funções lineares*
Uma função linear $T : E \longrightarrow F$ é injetiva se e somente se $T(0) = 0$

Num dos exercícios que você já fez, chamamos a atenção para a importância da solução da equação

$$T(x) = 0$$

o "sistema de equações homogêneas". Um dos exercícios mostrou, num caso particular, que $T(0)$ é um espaço vetorial. Vamos mostrar isto para uma *transformação lienar qualquer.*

Vamos começar com uma definição:

Definição 19 *Núcleo de uma transformação linear*
Seja $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear.

O espaço solução da equação $T(x) = 0$ se chama núcleo*de T, identificado com uma das notações $Ker(T)$ ou $Nuc(T)$.*

[2] se a ordem for permutada, ainda é linear... exercício

A adição de soluções Considere duas soluções, x_1, x_2 da equação $T(x) = 0$. Somando:

$$T(x_1) = 0 \tag{3.69}$$
$$T(x_2) = 0 \tag{3.70}$$
$$T(x_1 + x_2) = 0 \tag{3.71}$$
$$\tag{3.72}$$

e portanto a soma de soluções é uma solução.

Propriedades da adição de soluções

1. *comutatividade A* `adição` *de soluções é comutativa porque* $x_1+x_2 = x_2+x_1$ *em* E.

2. *existência do elemento neutro pela propriedade I das funções lineares (Teorema 17).*

3. *existência do inverso aditivo Considere uma solução* x. *Para qualquer escalar* λ *temos*
$$T(\lambda x) = \lambda T(x)$$
e portant, quando $\lambda = -1$ *teremos*
$$T(-x) = T(-1x) = -1T(x) = -10 = 0$$
e assim se $x \in Ker(T)$ *então* $-x \in Ker(T)$.

4. *associatividade da adição A adição é associativa é associativa em* E *logo tem que sê-lo em um seu subconjunto* $Ker(T)$.

Mostramos assim que $(Ker(T), +)$ *é um grupo comutativo.*

Multiplicação por um escalar

Já mostramos que, logo acima, que se $T(x) = 0$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda 0 = 0$$

portanto o $Ker(T)$ *é* estável *frente a multiplicações por escalares. Vejamos as propriedades desta multiplicação:*

1. *A associatividade à esquerda vale em* $Ker(T)$ *porque vale em* E *de quem* $Ker(T)$ *é subconjunto.*

2. *o elemento neutro da multiplicação não altera o multiplicando, vale em* $Ker(T)$ *porque vale em* E *de quem* $Ker(T)$ *é subconjunto.*

3. *o elemento neutro da adição torna nulo o multiplicando vale em* $Ker(T)$ *porque vale em* E *de quem* $Ker(T)$ *é subconjunto.*

4. *a distributividade da multiplicação por um escalar relativamente à soma de vetores é a propria linearidade de* T.

Mostramos assim que

Teorema **19** *Propriedade III das funções lineares*
Seja $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear, então $Ker(T)$ é um espaço vetorial.

Podemos reformular a *propriedade II das funções lineares* dizendo

Teorema **20** *Núcleo de transformações lineares injetivas*
Se $T : E \longrightarrow F$ for uma transformação linear injetiva, então $Ker(T) = \{0\}$ é o espaço vetorial trivial.

Retornando ao nosso projeto, a equivalência entre os espaços $\mathbf{R}^4$ e $\mathbf{R}_3[x]$, vemos que transformação inversa

$$(0, 0, 0, 0) \mapsto 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = 0$$

quer dizer que $Ker(T) = 0$ portanto, injetiva, e identificamos $\mathbf{R}_3[x]$ com um subconjunto do espaço vetorial$\mathbf{R}^4$.

Precisamos mostrar que T é sobrejetiva. Tome uma énupla $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^4$ a ela corresponde a imagem inversa $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ portanto T é bijetiva. Demonstramos que

Teorema **21** $\mathbf{R}_3[x]$ *e* $\mathbf{R}^4$ *são isomorfos*

As contas para provar que

Teorema **22** $\mathbf{R}_{n-1}[x]$ *e* $\mathbf{R}^n$ *são isomorfos*

são absolutamente semelhantes as que fizemos acima. É um exercício instrutivo faê-las detalhadamente porque obrigará o estudante a treinar redação matemática e escrever notações adequadas para fazer a adaptação do que escrevemos, para o novo caso.

3.6.2 $\mathbf{R}^n$ - o paradigma da dimensão finita

Na solução dos exercícios da seção anterior, que o leitor poderá encontrar na seção final deste capítulo, usamos com frequência a identificação de espaços com o eapaço $\mathbf{R}^n$.

Vamos desenvolver agora a demonstração de que os espaços $\mathbf{R}^n \; ; \; n \in \mathbf{N}$ servem de representantes para qualquer espaço vetorial de dimensão finita.

Considere um *espaço vetorial abstrato* E de dimensão finita. Dizer que E tem dimensão n significa que podemos encontrar *exatamente* n vetores linearmente independentes em E formando um conjunto de geradores, uma base para E.

Selecionemos um tal conjunto

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, \cdots e_n\}$$

[3] Dizer que $\mathcal{E}$ geral E significa que dado $x \in E$ podemos encontrar *exatamente* n escalares

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_n$$

[4] tal que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Se a seleção dos vetores que gera E não é 'unica, já vimos diversos exemplos disto, entretanto, quando selecionarmos um conjunto de geradores, relativamente a este conjunto de geradores, a coleção de escalares é 'unica. Suponha que não seja assim, que possamos escolher duas coleções de escalares

$$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \cdots \lambda_{1n}$$

e

$$\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \cdots \lambda_{2n}$$

tal que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{1k} e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2k} e_k$$

então podemos subtrair as duas somas tendo

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_{1k} - \lambda_{2k}) e_k = 0$$

e como os vetores $e_k k \in \{1, \cdots, n\}$ são l.i. então

$$(\lambda_{1k} - \lambda_{2k}) = 0 \equiv \lambda_{1k} = \lambda_{2k}$$

é uma única coleção de escalares. Demonstramos o

Teorema **23** *Unicidade da combinação linear Dada uma base*

$$\mathcal{E} = \{e_1, \cdots e_n\} = (e_k)_{k=1\ldots n}$$

para o espaço vetorial E, existe uma única coleção de escalares

$$\lambda_1, \cdots \lambda_n$$

tal que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Esta única coleção de escalares cuja combinação linear representa x em E é chamada de coordenadas de x *relativamente a base*

$$\mathcal{E} = \{e_1, \cdots e_n\} = (e_k)_{k=1\ldots n}$$

[3] observe um defeito de notação, n pode ser 1, corrija os autores
[4] mesmo erro...

Não poderia ser diferente disto, escolhido um *referencial*, uma base para o espaço, as coordenadas de qualquer vetor, relativamente a este *referencial*, são únicas.

Estamos em condições de encerrar o nosso projeto:

- Dado um espaço vetorial E de dimensão n;
- fixada uma base $(e_k)_{k=1\ldots n}$ para este espaço;
- Podemos associar de forma única a cad $x \in E$ uma coleção de escalares

  $$\lambda_1, \cdots \lambda_n = (\lambda_k)_{k=1\ldots n}$$

  a menos de alguma permutação do conjunto dos escalares.
- Fica assim definida pelo menos uma transformação linear

  $$E \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n; \tag{3.73}$$
  $$E \ni x \mapsto T(x) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \tag{3.74}$$

  garantida pela unicidade das coordenadas de x relativamente à base escolhida.

Temos que provar que esta transformação é linear e bijetiva, portanto um `isomorfismo` de espaços vetoriais.

- A linearidade

  Tome $x_1, x_2 \in E$. A cada um deles corresponde uma énupla de coordenadas,

  $$T(x_1) = (x_{11}, \ldots, x_{1n}), T(x_2) = (x_{21}, \ldots, x_{2n})$$

  Se somarmos as combinações lineares que representa cada um deles em E teremos

  $$T(x_1 + x_2) = (x_{11} + x_{21}, \ldots, x_{1n} + x_{2n}) = \tag{3.75}$$
  $$= (x_{11}, \ldots, x_{1n}) + (x_{21}, \ldots, x_{2n}) = \quad = T(x_1) + T(x_2) \tag{3.76}$$

  Tome agora $x \in E, \lambda \in \mathbf{R}$ teremos

  $$T(\lambda x) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \tag{3.77}$$
  $$= \lambda(x_1, \ldots, x_n) = \quad = \lambda T(x) \tag{3.78}$$

- injetividade Considere o $Ker(T)$ a imagem inversa de um conjunto de coordenadas nulas

  $$(0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$$

  a ela corresponde uma combinação linear nula, logo o vetor zero de E. Portanto $Ker(T) = \{0\}$ e T é injetiva.

- bijetividade Considere um conjunto de coordenadas

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$$

a combinação linear

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

representa um único elemento $x \in E$ que é a imagem inversa deste conjunto de coordenadas por T que é assim sobrejetiva.

Provamos assim que

Teorema **24** *Isomorfismo de espaços de dimensão n I Qualquer espaço vetorial de dimensão n é isormorfo ao espaço $\mathbf{R}^n$.*

Observação 8 *Não unicidade dos isomorfismos Uma simples permutação da ordem dos vetores da base altera a definição do isomorfismo*

$$E \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n$$

Isto mostra que o isomorfismo entre dois espaços não é 'unico.

Queremos ir além um pouquinho. Dados dois espaço vetoriais de dimensão n, não somente eles são isormorfos com $\mathbf{R}^n$, mas entre si.

Para vê-lo, considere dois espaços vetoriais E, F de dimensão n e os isomorfimos

$$E \overset{T_1}{\Longrightarrow} \mathbf{R}^n, F \overset{T_2}{\Longrightarrow} \mathbf{R}^n$$

Como T_2 é bijetiva, logo inversível, temos

$$E \overset{T_1}{\Longrightarrow} \mathbf{R}^n \overset{T_2}{\Longrightarrow} F \tag{3.79}$$

$$E \overset{T_2 o T_1}{\Longrightarrow} F \tag{3.80}$$

$$\tag{3.81}$$

e nos queremos provar que a composta $T_2 o T_1$ é linear.

Considere

$$x_1, x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E \tag{3.82}$$

$$T_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \tag{3.83}$$

$$\lambda_1 T_1(x_1) + \lambda_2 T_1(x_2) \tag{3.84}$$

$$T_2(\lambda_1 T_1(x_1) + \lambda_2 T_1(x_2)) = \lambda_1 T_2(T_1(x_1) + \lambda_2 T_2(T_1(x_2)) \tag{3.85}$$

$$T_2 o T_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T_2 o T_1(x_1) + \lambda_2 T_2 o T_1(x_2) \tag{3.86}$$

Assim $T_2 o T_1$ é linear, bijetiva portanto um isomorfismo e E, F são isormorfos.

Teorema **25** *Isomorfismo de espaços de dimensão n II Quaisquer espaços vetoriais de dimensão n são isormorfos entre si.*

Isto torna a relação *isomorfismo* uma relação de equivalência entre os espaços vetoriais. Vamos denotar o isomorfismo entre dois espaços vetoriais com o símbolo $\approx$, temos então:

- reflexividade A transformação linear identidade é um isomorfismo:
$$E \approx E$$
- simetria
$$E \approx F \equiv F \approx E$$
- transitividade
$$E \approx F \text{ e } F \approx G \Rightarrow E \approx G$$

3.7 Morfismos de espaços vetoriais

Também chamados por alguns autores, de *homomorfismos* de espaços vetoriais.

Os isomorfismo são muito *radicais*, e a *radicalização* parece ser um defeito, hoje em dia. Vamos considerar uma forma mais amena de relação entre os espaços, os *morfismos.*

Para ter um morphismo entre dois espaços vetoriais, basta ter uma transformação linear entre eles. Você pode dizer que estamos apenas trocando o nome das transformação lineares, dizendo que agora as chamaremos de *morfismos.* É verdade.

Observação 9 *Morfismos*

É verdade que estamos criando um conceito aparentemente gratuito, mas é possível ver de uma forma mais ampla, que englobe diversas estruturas matemáticas, os tipos de funções *que operam entre duas estruturas* preservando *as propriedades básicas das estruturas, como é o caso das* transformações lineares *que preservam a linearidade entre espaços vetoriais. Um outro exemplo disto são as funções contínuas, que preservam* as propriedades básicas *dos espaços de* funções contínuas *e são assim um tipo* morfismo *dos espaços topológicos que é a estrutura natural onde se pode definir* continuidade.

Podemos dizer que Matemática é uma teoria de modelos, que criamos, em Matemática estruturas compostas de objetos e dos morfismos entre eles. Apenas para que você compreenda que esta não é uma generalização gratuita, as estuturas computacionais modernas vem se beneficiando fortemente desta forma descrever as relações entre os objetos.

Exercícios 5 *Dimensão*

1. *interseção reta plano*

(a) *Descreva as possíveis interseções entre uma reta e um plano*

(b) *Justifique por que, se a interseção de uma reta com um plano tiver dois pontos distintos, então a reta está contida no plano (é um subespaço do plano).*

(c) *Justifique por que a dimensão máxima da interseção de uma reta com um plano, se a reta não for um subespaço[5] do plano, é zero.*

(d) *Justifique que se uma reta tiver interseção vazia com um plano, uma reta perpendicular a ela intercepta o plano em exatamente um ponto.*

2. *interseção reta[6] e espaço*

Generalizar a questão anterior discutindo as possibilidades de interseção de uma reta com um espaço tridimensional.

3.8 Dimensão e variedade

Falando de uma forma imprecisa, mas que expressa o fundamental, dizemos que se uma equação tiver apenas uma "variável livre" ela representa uma curva. Se tiver duas "variáveis livres", representa uma superfície...

Vejamos um exemplo.

Exemplo 10 *Variável livre*

Considere a equação $w = F(x, y, z)$, uma função de tres variáveis.

Dizemos que w é uma variável dependente *porque seus valores são deduzidos dos valores que dermos a cada uma das variáveis x, y, z. Consequentemente as variáveis x, y, z se chamam* livres *porque a elas podemos associar, arbitrariamente valores. Observe que este conceitos são* difusos *porque podemos intercambiar a posição das* variáveis *e, consequentemente, considerar outra das variáveis como dependente...*

*O que interessa aqui é a "*quantidade de variáveis *livres", três.*

Por exemplo, poderiamos calcular, se o ponto $(-3, 0, 2)$ estiver no domínio de F, usando um pacote computacional, scilab*, por exemplo, que é* software livre*,*

$$F(x, y, z) = x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + y^5 \tag{3.87}$$

$$w(-3, 0, 2) = F(-3, 0, 2) \ ; \ x = -3; y = 0; z = 2 \tag{3.88}$$

$$w = F(-3, 0, 2) = -27 \tag{3.89}$$

Com a mesma forma de pensar, dizemos que as variáveis x, y, z são livres *porque atribuimos valores de nossa escolha para estas variáveis e assim calculamos o valor de w associado.*

Considere agora a equação $F(x, y, z) = 0$.

[5] o vazio não é um espaço vetorial...

Pelo `Teorema da Função Implícita`[7] *podemos escrever*

$$x = f_1(y, z) \ ; \ y = f_2(x, z) \ ; \ z = f_3(x, y),$$

sob certas condições. Isto mostra, usando o mesmo raciocínio anterior, que em $F(x, y, z) = 0$ *existem duas variáveis livres. Portanto*

$$F(x, y, z) = 0$$

representa uma superfície, um objeto de dimensão 2, enquanto que

$$w = F(x, y, z)$$

representa um objeto de dimensão 3.

Observe que você pode substituir o zero por qualquer constante. Ao fazermos

$$w = c$$

eliminamos *uma variável, o que pode também ser feito com qualquer das outras variáveis na expressão. Veja também que se*

$$F(x, y, z) = 0$$

é de dimensão 2, uma superfície, então caberia perguntar o que é

$$w = F(x, y, z)$$

tanto do ponto de vista de dimensão, como do ponto de vista geométrico. Diremos logo que é de dimensão 3 e que lhe daremos o nome de hipersuperfície. *É o método subversivo que adotamos, espalhando as idéias sem discutí-las, para que você se acostume com elas.*

O que se encontra por trás do número de variáveis é o conceito de "dimensão" e uma outra forma de expressar o conteúdo do parágrafo anterior consiste em dizer-se que *curvas* são *variedades* de dimensão 1, *superfícies* são *variedades* de dimensão dois, e que $w = F(x, y, z)$ representa uma *variedade* de dimensão três.

A dimensão é o número de variáveis menos um.

Acabamos de introduzir dois novos conceitos, por comparação: *variedade*, *hipersuperfície.*

Curvas, retas, planos, superfícies, são *variedades.* A palavra *variedade* vai nos libertar da prisão dimensional em que a nossa intuição geométrica nos acorrenta e que linguagem que falamos reflete.

Vamos "definir", informalmente, *variedade.* Que o leitor seja crítico e veja aqui uma falha na axiomática.

[7] veja no índice remissivo onde se encontra este teorema e o leia agora!

Definição 20 *Variedade O conceito de* variedade *nos libera da prisão tridimensional da lingua que falamos. Uma variedade é um* "objeto geométrico" *do espaço. O gráfico de uma função*

$$\{(x,y); y = f(x) \ ; \ \mathbf{R}^n \xrightarrow{f} \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n \ \ \mathrm{x} \ \ \mathbf{R} = \mathbf{R}^{n+1}$$

é uma variedade, também designada pelo nome de hipersuperfície *do* $\mathbf{R}^{n+1}$.

As variedades são portanto, as superficies, os planos, as retas, as curvas, os gráficos de funções, os pontos. Distinguimos dois tipos de variedades: as variedades lineares, *retas, planos enfim todas cuja equação seja uma combinação linear de "coeficientes" com "variaveis" que representam as coordenadas dos pontos do espaço e as outras, as* variedades não lineares. *Mais a frente falaremos de uma outra classificação.*

- *As variedades lineares são os gráficos de funções lineares que se podem expressar matricialmente como*

$$\mathbf{R}^n \ni x \mapsto y = \mathcal{T}x.$$

- *Os* hiperplanos *são as variedades lineares de dimensão máximal, imediatamente inferior a do espaço que estivermos considerando.*

- *As* hipersuperfícies *são as variedades (não necessariamente lineares) de dimensão máximal, imediatamente inferior a do espaço que estivermos considerando.*

Exemplo 11 *Variedade e dimensão*

- *Sabemos o que são pontos, apesar de que nunca tenhamos visto nenhum. São as* variedades de dimensão zero. *São os hiperplanos de* $\mathbf{R}$ *e também são as hipersuperfícies deste espaço. Neste nível não distinguimos os tipos de variedade...*

- *O próximo item na hierarquia dimensional, são as variedades de dimensão 1, as curvas. As retas são* variedades lineares *de dimensão 1. Uma circunferência não é uma* variedade linear, *é uma variedade* não linear de dimensão 1. *As "retas"são os hiperplanos do* $\mathbf{R}^2$, *são também* hipersuperfícies *deste espaço. As curvas são as* hipersuperfícies *do* $\mathbf{R}^2$.

- *Seguindo para uma dimensão maior temos as superfícies, as variedades de dimensão dois. Planos são variedades lineares de dimensão dois. É um tipo de superfície. Tem superfícies que não são planas, não são variedades lineares, são variedades de dimensão dois. Os "planos"são os hiperplanos do* $\mathbf{R}^3$, *as superfícies são as* hipesuperfícies *do* $\mathbf{R}^3$.

- *Depois temos as variedades de dimensão 3, o espaço em que vivemos é uma variedade linear de dimensão 3. O globo terrestre, a Lua, os planetas, são variedades não lineares de dimensão 3. Uma variedade linear de dimensão três é um hiperplano do* $\mathbf{R}^3$.

- *Nós vivemos na superfície terrestre, um exemplo de variedade não linear de dimensão dois. O globo terrestre, com o seu interior, é um exemplo de variedade não linear de dimensão três.*
- *As* hipersuperfícies *são as variedades de dimensão máximal, imediatamente inferior a do espaço que estivermos considerando. Assim*
  - *as "retas"são os hipersuperfícies do* $\mathbf{R}^2$*, como os círculos, as parábolas, as elipses. Enfim as curvas são as hipersuperfícies do* $\mathbf{R}^2$*.*
  - *os "planos", a fronteira das esferas, as faces de um cubo, os parabolóides hiperbólicos (sela do macaco), são hipersuperfícies do* $\mathbf{R}^3$*.*
  - *Uma variedade de dimensão* 3 *contida no* $\mathbf{R}^4$ *é uma hipersuperfície deste espaço.*
  - *Uma variedade de dimensão* $n-1$ *contida no* $\mathbf{R}^n$ *é uma hipersuperfície deste espaço.*

Os dois conceitos, *hiperplanos, hipersuperfícies* são conceitos relativos. Não podemos falar de hiperplanos sem mencionar qual é o espaço em que os consideramos. O mesmo se diga das hipersuperfícies.

3.8.1 Hiperplano e hipersuperfície no $\mathbf{R}^4$

Mas podemos nos colocar em dimensão ainda mais elevada, o $\mathbf{R}^4$ é um espaço de dimensão 4, porque os seus elementos se expressam usando *quatro variáveis livres*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

todas de sua livre escolha. O espaço em que vivemos é uma *variedade linear*, um *hiperplano* do $\mathbf{R}^4$. O globo terrestre e os planetas são *hipersuperfícies* do $\mathbf{R}^4$.

- hiperplano Uma variedade linear de dimensão 3 é um hiperplano do $\mathbf{R}^4$. Quer dizer que o $\mathbf{R}^3$ é um hiperplano do $\mathbf{R}^4$. Qualquer translação $\mathbf{R}^3 + \vec{r}$ é um hiperplano do $\mathbf{R}^4$. Nos vivemos num hiperplano do $\mathbf{R}^4$ a bordo de uma hipersuperfície do $\mathbf{R}^3$.
- hipersuperfície Uma variedade não linear de dimensão 3 é um hipersuperfície do $\mathbf{R}^4$. A Terra por exemplo, não a superfície em que vivemos, mas o globo terrestre todo, é uma hipersuperfície do $\mathbf{R}^4$.

3.8.2 Um pouco sobre classificação de variedades

Nem toda variedade tem uma equação explicita, porém, e isto é consequência do Teorema da Função Implícita, que todas as variedades tem uma equação.

O tipo de equação de uma variedade serve para classificá-la:

- Variedades algébricas são aquelas que tem uma equação polinomial; Vamos incluir neste caso uma variedade que seja definida por um programa em uma linguagem de alto nível.

- Variedades não algébricas quando a equação que as definem tem expressões transcendentais.

- Gráficos de funções quando tivermos uma função

$$\mathbf{R}^n \supset W \xrightarrow{f} V \subset \mathbf{R}^m$$

  então $graf(f)$ será

  - uma *variedade* algébrica, se f for uma expressão polinomial;
  - uma *variedade* não algébrica, se f for uma expressão não polinomial, contiver funções transcendentais em sua fórmula.

- Variedades Diferenciáveis são aquelas cuja expressão que as definem são diferenciáveis. As variedades algébricas são diferenciáveis, por exemplo.

Definição 21 *Variedades tangentes*
Sejam duas funções f, g

$$W \xrightarrow{f,g} V$$

*e as correspondentes variedades, do tipo "*gráfico de função*", $graf(f), graf(g)$.*

Diremos que as duas variedades $graf(f), graf(g)$ são tangentes no ponto $(a, b) \in W$ x V se houver uma vizinhança $D(a, r) \subset W$ tal que

$$\begin{cases} f(a) = g(a) & = b \\ f(a+h) - g(a+h) & = o(|h|) \ ; \ |h| < r \end{cases} \tag{3.90}$$

Definição 22 *função diferenciável Considere $W \xrightarrow{f} V$ uma função contínua definida num aberto $W \subset \mathbf{R}^n$ e tomando valores em outro aberto $V \subset \mathbf{R}^n$. Diremos que f é diferenciável no ponto $a \in W$ se houver uma função linear T tal que $graf(f), graf(T)$ são tangentes no ponto $\underline{a}$.*

$$f(a+h) - f(a) - T(h) = o(|h|)$$

Definição 23 *dimensão de uma variedade linear*
As variedades lineares *são as variedades da forma $graf(T)$ em que T é uma função linear afim.*

Podemos definir de forma natural a dimensão das variedades lineares porque o gráfico $graf(T)$ é um espaço vetorial (afim), então a dimensão de $graf(T)$ é a dimensão do espaço vetorial afim $graf(T)$.

Considere uma variedade Ω e uma vizinhança aberta de um ponto $a \in \Omega$. Se houver uma variedade linear $graf(T)$ tangente a Ω no ponto $\underline{a}$, então diremos que a dimensão local da variedade Ω em a é a $dim(graf(T))$.

Exemplo 12 *Variedades com componentes de dimensão variada*

Observe que a definição acima admite a possibilidade de que uma variedade seja composta de componentes-*variedades com dimensões distintas. Por exemplo, uma reta e um ponto que não pertença a esta reta formam uma variedade que tem uma componente de dimensão zero e outra componente de dimensão 1.*

Observação 10 *Gráfico e outros conceitos indefinidos*

Observe que precisamos do conceito de dimensão local para variedades que não sejam lineares. As variedades lineares terão a mesma dimensão em qualquer de seus pontos, porque são espaços vetoriais afins. Mas as variedades não lineares podem ser aglomerados os mais extranhos de sub-variedades com dimensões locais distintas. Considere "Saturno e seus aneis", supondo que os aneis sejam de dimensão dois e Saturno de dimensão três, obviamente, estamos dentro de um exemplo forçado uma vez que nenhuma variedade do espaço x *tempo em que vivemos tem dimensão diferente de três....*

Não definimos gráfico, *este conceito fica entre os muitos que iremos usar implícitamente sem alertar o leitor para isto, afim de não tornar enfadonha a leitura.*

Vejamos de imediato qual a relação que pode haver com distintas funções lineares T_1, T_2 que sejam tangentes ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

$$f(a+h) - f(a) - T_1(h) = o(|h|) \tag{3.91}$$
$$f(a+h) - f(a) - T_2(h) = o(|h|) \tag{3.92}$$
$$T_1(h) - T_2(h) = o(|h|) \tag{3.93}$$
$$(T_1 - T_2)(h) = o(|h|) \tag{3.94}$$

porque "também" a variável é linear relativamente às funções lineares... e como $S = T_1 - T_2$ é uma função linear, temos

$$S(h) = o(|h|)$$

mas a única função linear que tem esta propriedade é a função identicamente nula, logo

$$T_1 = T_2$$

e concluimos

Teorema 26 *Unicidade da derivada*

Se f for diferenciável, a função linear tangente é 'unica.

Neste momento é interessante fixarmos uma base para o espaço vetorial. Como não precisaremos de mudar o referencial, vamos usar a base usual

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Consequentemente, a cada *transformação linear* lhe corresponde uma única matriz.

Considere agora uma função

$$\mathbf{R}^n \supset \Omega : \xrightarrow{f} \mathbf{R}^m$$

e um ponto $\underline{a \in \Omega = Dom_f}$. A derivada, $J(f)$, calculada em $\underline{a}$ é uma função linear cujo gráfico é tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Seja T a matriz desta transformação linear

Como

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = J(f)(a) \Longrightarrow \tag{3.95}$$

$$\tfrac{\partial T}{\partial e_i} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

a derivada na direção de e_i. Observando que esta é também a derivada de f na direção de e_i, podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial e_i}\frac{\partial f}{\partial e_j}|_a = \frac{\partial}{\partial e_i}\frac{\partial T}{\partial e_j}|_a = a_{ij} \;=\; \frac{\partial}{\partial e_j}\frac{\partial T}{\partial e_i}|_a = a_{ji} = \frac{\partial}{\partial e_j}\frac{\partial T}{\partial e_i}|_a = \frac{\partial}{\partial e_j}\frac{\partial f}{\partial e_i}$$

Assim, se f for derivável, (tiver uma variedade linear tangente ao seu gráfico), então

Teorema 27 *Teorema de Schwartz*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_i e_j} = \frac{\partial}{\partial e_i}\frac{\partial f}{\partial e_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial e_j e_i} = \frac{\partial}{\partial e_j}\frac{\partial f}{\partial e_i}$$

As derivadas parciais de ordem 2, mistas, são iguais.

Devido a erros de concepção os que nos antecederam chamaram T de jacobiana de f no ponto a, $J(f)(a)$, em vez de chamá-la simplesmente de *derivada de* f. Continuaremos com a notação histórica mas corrigindo a idéia.

Observação 11 *A notação* $J(f)(a)$

A matriz jacobiana é uma matriz funcional, uma função de $\underline{n}$ *variáveis no contexto destas notas. Consequentemente tem sentido escrevermos o seu valor no ponto* $a \in \mathbf{R}^n$ *identicando assim uma matriz que foi obtida ao substituirmos cada uma das variáveis pelas coordenadas de* $\underline{a}$.