Parte I

Vetores e sistemas de equação

Capítulo 1

O plano complexo

No esforço para resolver equações que nos tempos modernos se pode dizer que começa com Cardano e seus contemporâneos no século 16. Cardano mesmo não conhecia os números complexos mas fez uma operação incluindo raiz quadrada de número negativo que é reconhecida com um dos primeiros passos na descoberta destes números.
Como o próprio nome registra, os matemáticos criaram aos poucos uma entidade estranha, chamada número imaginário, que apareceu como solução da equação do segundo grau.
Com os números imaginários se criaram os "números complexos" outro tipo estranho que funcionava muito muito bem como se fosse um número... o resultado é um objeto geométrico que vamos usar aqui como modelo de vetor.

Os números complexos são assunto ainda da Matemática Elementar, aqui nós os vamos recordar com um sabor de Matemática Universitária e assim utilizá-los como uma introdução aos vetores, porque eles são vetores desde sua origem.

1.1 Incompletitude algébrica de R

A fórmula para resolver equações do segundo grau produz a solução

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac, \tag{1.1}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{1.2}$$

Se Δ for negativo a equação não tem soluções reais. Aos poucos os matemáticos foram experimentando a idéia de aceitar um significado para $\sqrt{\Delta}\ ; \Delta < 0$ começando com uma pequena experiênicia, $i = \sqrt{-1}$ estendendo a regra estrita sobre raizes:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \tag{1.3}$$

que valia apenas quando $x, y \geq 0$. Com esta estensão se poderia calcular

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i \cdot 2 \tag{1.4}$$

e enfim qualquer raiz de número negativo poderia agora ser calculada.

Em particular, *as equações do segundo grau* passam a ter <u>sempre</u> solução apesar de que, cuidadosamente, se acrescente a observação, "*raizes imaginárias*" quando $\Delta < 0$.

Exemplo 1 *Resolvendo uma equação do segundo grau*

$$\begin{gathered}4x^2 - 12x + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -256 \\ x' = \tfrac{12+16i}{8} \ ; \ x'' = \tfrac{12-16i}{8} \\ x' = \tfrac{3}{2} + 2i; x'' = \tfrac{3}{2} - 2i\end{gathered}$$

em que vemos aparecer um "número" do tipo

$$z = a + bi, \tag{1.5}$$

formado por um par de números reais separados pela *unidade imaginária* $\boxed{i}$.

Um "número" desta forma se chama "número complexo" e foram precisos vários séculos para que eles fossem admitidos como um número comum, *sem complexos*.

1.1.1 Algebra dos números complexos

Repetindo o que fizeram os nossos antepassados, os números complexos foram inicialmente tratados como uma expressão algébrica em que $\boxed{i}$ era considerado como uma "variável" mas obedecendo a regra

$$\boxed{\sqrt{-1} = i \iff i^2 = -1. \tag{1.6}}$$

Assim, $z = 2 + 3i, w = 5 - 2i$ são somados segundo as regras da álgebra:

- "quem tem "i" é somado com quem tem "i""
- e os que não tiverem "i" são somados entre si":

$$z + w = (2 + 3i) + (5 - 2i) = (2 + 5) + (3 - 2)i = 7 + i$$

e de maneira idêntica se procede com a multiplicação:

$$(2 + 3i)(5 - 2i) \tag{1.7}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & +3i & \\ 5 & -2i & \\ \hline 10 & 15i & \\ & -4i & -6i^2 \\ \hline 10 & +11i & -6(-1) \\ \hline 16 & +11i & \end{array}$$

veja a figura (1.2) na página 10.

Usando estas regras da álgebra podemos escrever uma definição formal para a adição e para a multiplicação de números complexos. Primeiro vamos banir a expressão "quem tem i" do texto porque ela não é uma *expressão técnica* e nós somos extremamente ligados em *expressões técnicas*.

Definição 1 *Parte real e imaginária de um número complexo*

Dado um número complexo, escrito como

$$z = a + bi \equiv (a, b)$$

designaremos

$$\Re(z) = a \ \textit{a parte real de } z \tag{1.8}$$

$$\Im(z) = b \ \textit{a parte imaginária de } z \tag{1.9}$$

Definição 2 (Adição de números complexos) *Dados dois números complexos*

$$v = a + bi \equiv (a, b) \tag{1.10}$$

$$w = c + di \equiv (c, d) \tag{1.11}$$

definimos

$$v + w = (a + c, b + d) \tag{1.12}$$

$$\equiv v + w = (a + c) + (b + d)i \tag{1.13}$$

a soma se faz "coordenada por coordenada", ou ainda

$$\Re(v + w) = \Re(v) + \Re(w) \tag{1.14}$$

$$\Im(v + w) = \Im(v) + \Im(w) \tag{1.15}$$

As duas formas

$$a + bi, (a, b)$$

são equivalentes e usamos uma ou a outra conforme for mais conveniente:

$$\boxed{\text{expressão algébrica}}\ \mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2\ \boxed{\text{entidade geométrica.}} \tag{1.16}$$

Observe que a última parte, na expressão acima, $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, é uma *representação geométrica* para os números complexos, uma vez que estamos dizendo que existe um ponto do plano,

$$(c, d) \in \mathbf{R}^2 \tag{1.17}$$

que é "equivalente" ao número complexo

$$c + di \in \mathbf{C}. \tag{1.18}$$

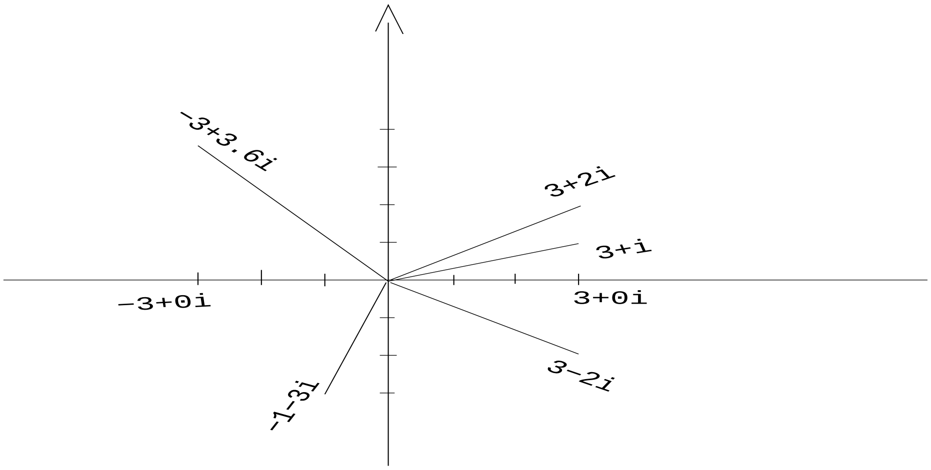

Figura 1.1: Representação geométrica dos complexos

Quando foi descoberta a *representação geométrica* para os números complexos, um *salto qualitativo* foi dado. Como eles tinham uma *representação geométrica*, não podiam ser tão estranhos, *imaginários*, como no começo pareciam. Veja a figura (1.1).

Definição 3 *Produto de números complexos*
Dados dois números complexos $z = a + bi, w = c + di$ *o produto deles é:*

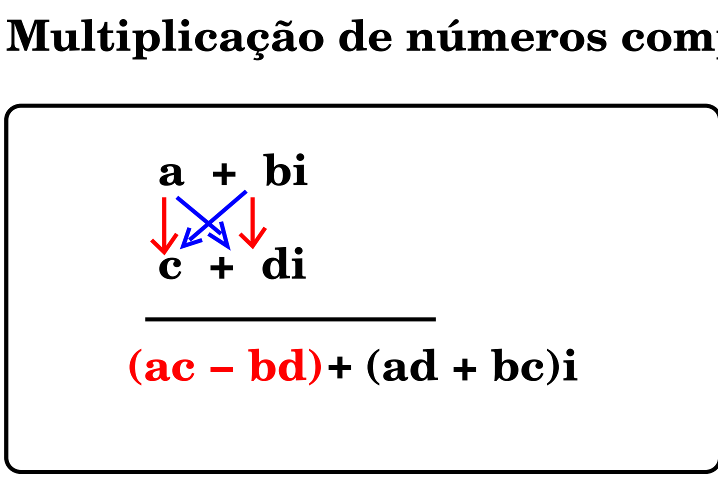

Figura 1.2: Produto de números complexos

$$(ab - bd) + (ad + bc)i$$

1.1.2 A representação geométrica dos complexos

Falamos acima na equivalência

$$\mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2, \tag{1.19}$$

o par (c, d) é um ponto do plano e, assim, estamos *representando* um número complexo com uma entidade geométrica, um ponto.

Os números complexos trouxeram, para o reino dos números, os conceitos da geometria: ângulo, módulo, direção e sentido. A Física, desde cedo, lançou mão deles, com muito sucesso, por exemplo, na eletricidade.

A figura (1.3) na página 12 descreve alguns aspectos geométricos dos números complexos, como o módulo e o argumento.

- o vetor z O ponto do plano, $z = (a, b)$ determina com a origem um segmento de reta que identificamos, também, com o número complexo z e que vamos chamar de *vetor*;

- argumento de z é o ângulo que o *vetor* z determina com o semi eixo positivo OX, no sentido anti-horário, partido do semi-eixo OX. Notação $arg(z)$

- módulo de $z = (a, b)$ é o comprimento do segmento de reta que subentende o vetor z. Notação
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
pelo teorema de Pitágoras;

A próxima lista é um *laboratório* que deve preparar a sua intuição para as construções que faremos depois.

Laboratório 1 (O plano complexo) *A interpretação geométrica*

1. *Encontre as soluções da equação:* $x^2 - 3x + 1 = 0$.

2. *Encontre as soluções da equação:* $x^2 + 1 = 0$.

3. *Verifique, experimentando na equação, que os números* $i, -i$ *são soluções da equação* $x^2 + 1 = 0$.

4. *Some algebricamente e represente geometricamente:* $u+v$;

   a) $u = 3 + 2i; v = 2 + 3i$ *b)* $u = 3 - 2i; v = 3 + 2i$
   c) $u = 3 + 2i; v = -3 - 2i$ *d)* $u = 3 - 2i; v = 2i - 3$
   e) $u = 2i - 3; v = 3 - 2i$ *f)* $u = 2 - 3i; v = 3i - 2$

5. *Efeitos da multiplicação*

   (a) *Multiplique* 3+2i *pelos inteiros 2,3,5,10. Represente geometricamente os resultados.*

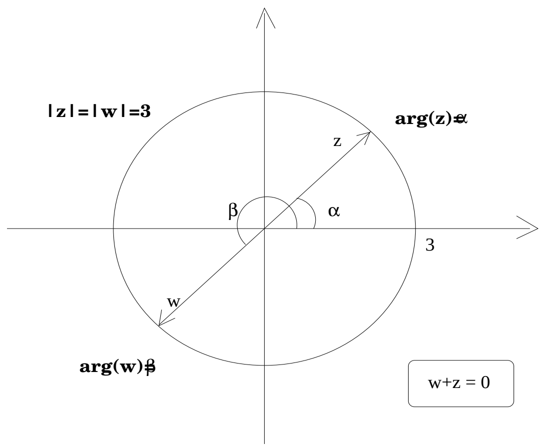

Figura 1.3:

(b) *Multiplique* $3 + 2i$ *por 2i, 3i, 5i,10i. Represente geometricamente os resultados. Elabore uma teoria a partir da semelhança dos resultados obtidos.*

6. *Verifique que o número complexo* $1 + 0i$ *é o elemento neutro da multiplicação.*

7. *Calcule o inverso multiplicativo de* $3 + 2i$ *e represente ambos geometricamente.*

8. *Multiplique* $z = 3 + 2i$ *por si próprio, represente geometricamente e verifique o qual a relação entre* $arg(z), arg(z^2)$*.*

9. *Multiplique* $3+2i$ *por* $3-2i$ *e represente geometricamente estes vetores e o produto deles.*

10. *Módulo de um número complexo*

    Uma das razões que tornam os números complexos *um tipo de número a parte, é o seu* envolvimento *com a geometria. Como um número real, os números complexos tem módulo, mas neste caso o método de cálculo se deduz direto do Teorema de Pitágoras.*

    Definição 4 *Módulo do número complexo* $a + bi$*.*

$$||(a + bi)|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

11. *Calcule o módulo de*

$$u \; ; \; u \in \{3+2i, 2+3i, 3-2i, 2-3i\}$$

12. *distância* *Observe que nos reais,* $|a-b|$ *é a distância,* $d(a,b)$*, entre os dois números* a, b*. Da mesma forma, entre dois números complexos* u, v *a distância entre eles vem do Teorema de Pitágoras e é o módulo da diferença* $|u-v|$*. Faça alguns exercícios para adquirir intuição: Encontre o lugar geométrico dos números complexos* u *tal que*

a) $\|u\| = 1$	*b)* $\|u\| = 2$	*c)* $\|u-3\| = 1$
d) $\|u-3\| = 2$	*e)* $\|u-(2+3i)\| = 1$	*f)* $\|u-(2+3i)\| = 2$
g) $\|u\| \le 1$	*h)* $\|u\| < 1$	*i)* $\|u\| \le 2$
j) $\|u-3\| < 1$	*k)* $\|u-(2-3i)\| < 2$	*l)* $\|2u-(2-3i)\| < 2$

a solução do exercício anterior *Pontos equidistantes de um* ponto dado *se encontram sobre uma circunferência. No caso das desigualdades vamos ter discos (com ou sem fronteira). Traduza as questões anteriores com a linguagem da equação de círculos, no plano* $\mathbf{R}^2$, **Notação:** $(\mathcal{C}(a,b), r)$ *é o círculo de centro no ponto* (a,b) *e raio* r.

13. *Potências de i*

   (a) *Calcule as 10 primeiras potências de i e encontre uma lei formação que estas potências obedeçam.*

   (b) *Escolha abaixo qual é o resultado impossível para a soma*

$$i^n - i^m \; ; \; n, m \in \mathbf{N}$$

☐ $\pm(1+i)$ ☐ $\pm(1-i)$ ☐ 0 ☐ i ☐ $2i$ ☐ $-2i$

14. *Relações de Girard, caso complexo* *Mostre que as relações de Girard, também são válidas para raízes complexas isto é, quando* $\Delta < 0$.

   Para a equação $x^2 + bx + c = 0, a = 1,$ *temos*

   (a) $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b$

   (b) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = c$

   Assim, a equação $x^2 + bx + c = 0$*, pode ser escrita da seguinte forma:*

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

15. *Encontre uma equação do segundo grau cujas raízes somem 6 e o produto seja 13.*

1.2 Números complexos: extensão dos reais

> Um número complexo é um par de números reais, portanto coïncide, com o conjunto, com o $\mathbf{R}^2$:
> $$\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2.$$
> A diferença é que existe em $\mathbf{C}$ uma multiplicação que estende a multiplicação dos números reais
> Usaremos as duas notações para um número complexo
> $$(a, b) \equiv a + bi$$
> sem mais nos preocuparmos com observações a respeito.

Uma terminologia existe em torno dos números complexos que vamos relembrar. A figura (1.4) página 14, ilustra os fatos descritos na próxima definição.

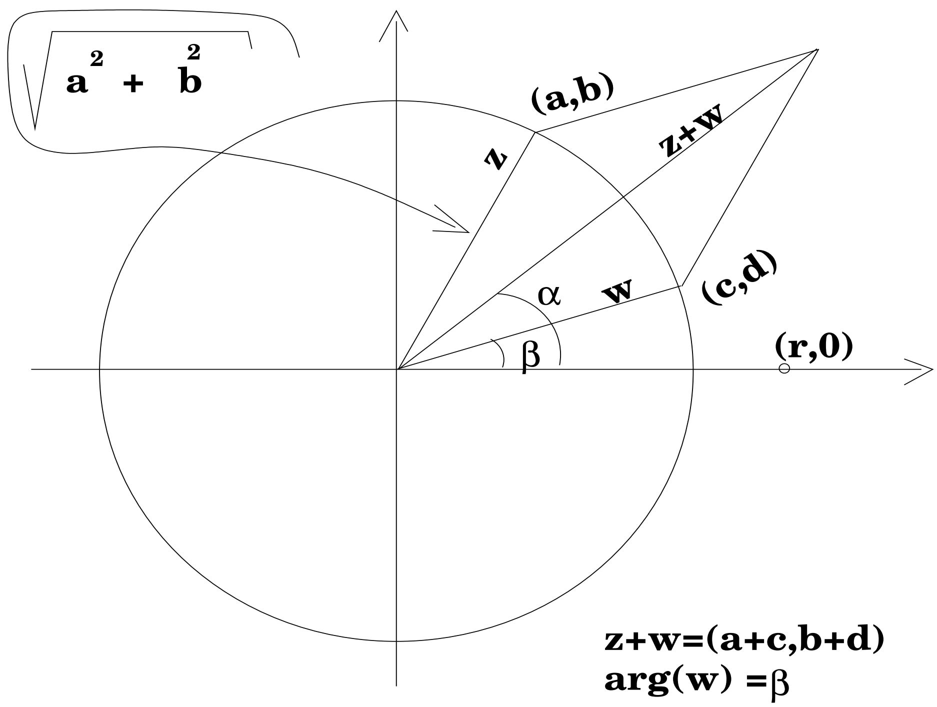

Figura 1.4: Propriedades dos números complexos

Definição 5 *Parte real e imaginária*
Dado um número complexo $z = (a, b)$ diremos

- *parte real* a *é a parte real de* z; $\boxed{a = Re(z)}$
- *parte imaginária* b *é a parte imaginária de* z ; $\boxed{b = Im(z)}$

- *módulo* *O número complexo $z = (a, b)$ determina com a origem $(0, 0)$ um segmento do plano que usamos para visualizar o número complexo z. O comprimento deste segmento é*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

o módulo de z.

- *argumento de um número complexo é o ângulo que o segmento de reta que representa geométricamente o número complexo faz com o semi-eixo positivo dos números reais medido na direção anti-horária. Quer dizer que se um número complexo for real, o seu argumento pode será zero quando for positivo, ou π quando for negativo.*

Na figura (1.4) o argumento de w é β e o argumento de $z + w$ é α.

$$arg(w) = \beta \; ; arg(z + w) = \alpha$$

- *Os números reais*

1. *O conjunto dos números reais positivos é o subconjunto de* $\mathbf{C}$ *formado pelos números complexos cuja* parte imaginária *é zero, e* argumento *zero,*

$$\mathbf{R}_+ = \{w = (x, 0) \; ; x \in \mathbf{R} \; ; arg(w) = 0\}$$

é o semi-eixo positivo OX_+

2. *O conjunto dos números reais negativos é o subconjunto de* $\mathbf{C}$ *formado pelos números complexos cuja* parte imaginária *é zero e o* argumento *é π:*

$$\mathbf{R}_- = \{w = (x, 0) \; ; x \in \mathbf{R} \; ; arg(w) = \pi\}$$

é o semi-eixo positivo OX_-

Teorema 1 (Extensão da multiplicação dos reais)
A multiplicação de números complexos é uma extensão da multiplicação de números reais.

Dem *:*

Dados dois números complexos

$$z = (a_1, b_1) = a_1 + b_1 i, \;\; w = (a_2, b_2) = a_2 + b_2 i$$

temos

$$zw = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = \tag{1.20}$$

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) = \tag{1.21}$$

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \tag{1.22}$$

Considere agora dois número reais: r_1, r_2. Eles determinam os dois números complexos

$$z = (r_1, 0), \;\; w = (r_2, 0).$$

Se os multiplicarmos vamos ter

$$z, w \in \mathbf{R} \tag{1.23}$$
$$zw = (r_1, 0)(r_2, 0) = \tag{1.24}$$
$$(r_1 r_2 - 0, 0) = \tag{1.25}$$
$$r_1 r_2 + 0i = r_1 r_2 = zw \in \mathbf{R} \tag{1.26}$$
$$\tag{1.27}$$

Como $\Im(r_1 r_2, 0) = 0$ *podemos dizer, com certo abuso de linguagem, que* $(r_1 r_2, 0) \in \mathbf{R}$

Consequentemente o produto de dois números complexos que sejam reais resulta no produto dos números reais que eles representam. Assim dizemos que a multiplicação de números complexos é uma extenção da multiplicação dos números reais.

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Como $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$ então o conjunto dos números complexos é um grupo abeliano com a adição de pares ordenados que já conhecemos.

Vamos agora resolver o exercício (ex. , 7), página 12. Adotaremos uma expressão mais geral: calcular o inverso de (a, b).

Por definição, o número complexo (x, y) será o inverso multiplicativo de (a, b), se, e somente se, o produto dos dois for o elemento neutro da multiplicação $(1, 0) = 1 + 0i$. Vamos forçar esta igualdade para determinar (x, y) :

$$(x, y)(a, b) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \equiv \tag{1.28}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \tag{1.29}$$
$$\equiv \begin{cases} ax - by = & 1 \\ bx + ay = & 0 \end{cases} \Rightarrow \tag{1.30}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} abx - b^2 y = & b \\ abx + a^2 y = & 0 \end{cases} ; \begin{cases} a^2 x - aby = & a \\ b^2 x + aby = & 0 \end{cases} \Rightarrow \tag{1.31}$$
$$\Rightarrow (a^2 + b^2)y = -b \ ; \ (a^2 + b^2)x = a \Rightarrow \tag{1.32}$$
$$\Rightarrow y = \tfrac{-b}{a^2+b^2} \ ; \ x = \tfrac{a}{a^2+b^2} \tag{1.33}$$

Se o número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ a solução encontrada é possível o que demontra o teorema:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2** *Inverso multiplicativo em* $\mathbf{C}$

Todo número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ *tem um* único *inverso multiplicativo em* $\mathbf{C}$ *que é da forma*

$$\frac{1}{(a, b)} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}) \tag{1.34}$$

Podemos simplificar a expressão do inverso se adotarmos uma notação que depois será muito útil:

Definição 6 *Conjugado de um número complexo*

Chamamos de conjugado de $z = (a, b)$ *ao número complexo* $\overline{z} = (a, -b)$

Veja na figura (1.5) o número complexo z, o seu conjugado, o seu inverso aditivo e sua projeção em $\mathbf{S}^1$.

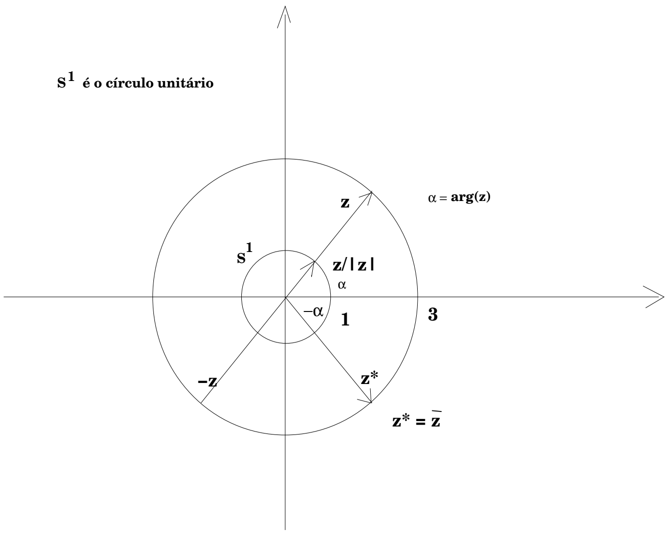

Figura 1.5: Conjugado de um número complexo

Em alguns textos o conjugado $\overline{z}$ de z é designado por z^*.

Vejamos agora que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(a,b)} = \frac{1}{a^2+b^2}(a,-b) = \tag{1.35}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2+b^2}\overline{z} \tag{1.36}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \tag{1.37}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{1.38}$$

e agora, atendendo a promessa de resolver o (ex. , 7) temos o inverso multiplicativo de $3+2i = (3,2)$ é

$$z = (3,2) \mapsto \overline{z} = (3,-2) \tag{1.39}$$

$$z = (3,2) \mapsto |z|^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \tag{1.40}$$

$$z = (3,2) \mapsto \frac{1}{z} = \frac{1}{13}(3,-2) = (\frac{3}{13}, \frac{-2}{13}) \tag{1.41}$$

Podemos usar a última expressão da sequência de equações acima para mostrar um uso frequente do “conjugado”, veja a sequência

$$z = (a, b)\ ;\ \overline{z} = (a, -b)\ ;\ z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \tag{1.42}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}z} \tag{1.43}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{1.44}$$

que mostra que podemos usar o conjugado para fazer surgir um número real no denominador, o que, muitas vezes, é 'util.

O próximo teorema reune as propriedades do conjungado:

Teorema 3 *Propriedades da conjugação*
Considere os números complexos u, v e o número real λ.

1. *Linearidade*
   (a) $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$
   (b) $\overline{\lambda u} = \lambda \overline{u}$
2. *reflexividade* $\overline{\overline{u}} = u$
3. *produto* $\overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v}$
4. *divisão* $\overline{\frac{u}{v}} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$
5. *reais* *Se* $u = \overline{u}$ *se e somente se* $u \in \mathbf{R}$.

Laboratório 2 *Módulo, argumento, forma polar*

1. *Resolva as equações*

a) $4z = -5$	*b)* $(4 + 3i)z = -5$	*c)* $4z^2 + 2z = -1$	*d)* $z^2 = -1$
e) $(4 + 3i)z = -2i$	*f)* $\frac{z}{4+3i} = -50$	*g)* $z^2 = 1$	*h)* $z^2 + 2z = 1$
i) $\frac{z+5-3i}{3-2i} = 0$	*j)* $3z + i = 5z - 7$	*k)* $z^2 + 3z = -10$	*l)* $4z^2 = 1$

2. *forma polar de um número complexo*
   (a) *módulo*
   Calcule o módulo dos números complexos dados abaixo:

   a) $2 + 3i$ *b)* $2 - 3i$ *c)* $0.4 + 0.2i$ *d)* $\frac{1+i}{2}$

   (b) *argumento*
   Calcule a projeção dos números complexos abaixo, no círculo trigonométrico, $\mathbf{S}^1$.

   a) $2 + 3i$ *b)* $2 - 3i$ *c)* $0.4 + 0.2i$ *d)* $\frac{1+i}{2}$

   (c) *módulo e argumento*
   Calcule a projeção de $a + bi$ *sobre* $\mathbf{S}^1$ *determinando quando isto não for possível.*

3. *forma matricial I*

   Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ *por* $x+iy$, *nesta ordem, equivale ao produto de matrizes*

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

4. *forma matricial II*

   Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ *por* $x+iy$, *nesta ordem, equivale ao produto de matrizes*

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

5. *produto e rotação*

   (a) *Considere dois pontos* A, P *sobre o círculo trigonométrico* $\mathbf{S}^1$,

$$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni A = cos\theta + isen\theta \equiv (cos\theta, sen\theta) \in \mathbf{R}^2 \tag{1.47}$$

$$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni P = cos\alpha + isen\alpha \equiv (cos\alpha, sen\alpha) \in \mathbf{R}^2 \tag{1.48}$$

   Identifique no produto AP *a expressão do* arco soma.

   (b) *Mostre que* AP, *nesta ordem, produz uma rotação de* θ *sobre o vetor* $\vec{P}$ *no sentido horário (positivo).*

   (c) *Como a multiplicação de números complexos é comutativa, procure a contradição, ou corrija o item anterior.*

   (d) *Conclua do item anterior que*

$$z, w \in \mathbf{S}^1 \Rightarrow zw \in S$$

   ou seja, o círculo unitário é estável sob a multiplicação.

   (e) *O grupo dos complexos de módulo 1* *Verifique que* S, *o conjunto dos números complexos de módulo 1, é um grupo comutativo com a multiplicação.*

1.3 Módulo, argumento e conjugado

Vamos *formalizar* algumas experiências que foram feitas nas seções precedentes: *parece que o produto de números complexos pode ser descrito de uma forma geométrica.* Vamos ver que de fato é assim e deduzir as propriedades do produto, de forma bem simples, usando a representação geométrica.

1.4 Intepretação geométrica do produto

Há duas largas estradas correndo em paralelo: Os números complexos, um par de números reais da forma $a + bi$ e um *puro par de números reais* (a, b).

São, em essencia, duas coisas diferentes, com propriedades distintas mas também com muita coisa em comum. Por exemplo

- em $\mathbf{C}$ tem um multiplicação
- em $\mathbf{R}^2$ não tem nenhuma multiplicação
- a adição em $\mathbf{C}$ é exatamente a mesma adição de $\mathbf{R}^2$

A forma polar de um número complexo

Um dos exercícios de laboratório que lhe foram propostos pedia que você *projetasse* um número complexo $a + bi$ sobre o círculo unitário $\mathbf{S}^1$.

Geometricamente, veja a figura (fig. 1.6), podemos obter esta projeção traçando a reta *determinada* pelo ponto $P = (a, b)$ e pelo centro de $\mathbf{S}^1$, veja a figura (1.6).

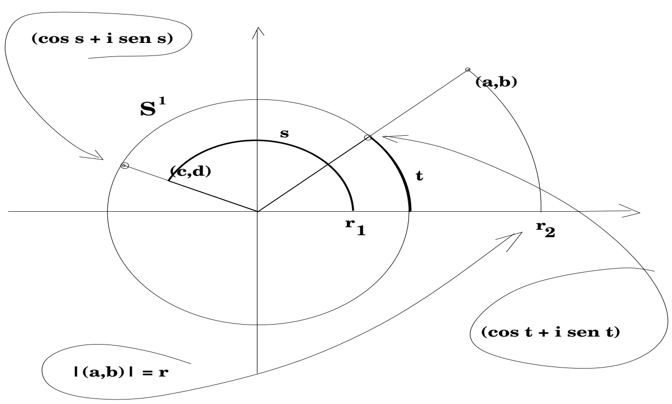

Figura 1.6: A projeção de $a + bi$ sobre $\mathbf{S}^1$.

Algebricamente isto se faz dividindo (a, b) pelo seu módulo, resultando assim num vetor de módulo 1, portanto, sobre $\mathbf{S}^1$. Usando a notação da (fig. 1.6), temos

$$(cost, sent) = cost + isent = \frac{a+bi}{|(a+bi)|} = \frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Estamos vendo assim a intimidade que existe entre os *números complexos* e a trigonometria. O importante neste momento é escrever o caminho de volta de $(cost, sent)$ para o número complexo (a, b) :

$$(a, b) = r(cost, sent)\ ;\ r = |(a, b)|. \tag{1.49}$$

com o que obtivemos a *forma polar* de (a, b). Nela vemos representados os dois conceitos geométricos que formam um número complexo: *módulo* e *argumento.* Vamos re-escrever esta fórmula colocando em evidência estes dois conceitos:

$$z = (a, b) = |z|(cosarg(z), senarg(z)); \tag{1.50}$$
$$z = r(cost, sent); \tag{1.51}$$
$$|z| = r = |(a, b)| \tag{1.52}$$

Laboratório 3 *Forma polar, trigonometria conjugação*

1. *Verifique as igualdades abaixo e faça uma representação geométrica das mesmas:*

   (a) Verifique que $2\mathcal{R}e(z) = z + \overline{z} \in \mathbf{R}$

   (b) Verifique que $2i\mathcal{I}m(z) = z - \overline{z} \in i\mathbf{R}$

   (c) Verifique que $z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbf{R}$

2. *Calcule* $(a + bi)^2$

3. *Fórmula de Moivre*

   (a) forma polar Quando escrevemos um número complexo usando a fórmula de Moivre, dizemos que usamos a forma polar *do número. Escreva os números*

   $$z_1 = 4 + 3i\ ;\ z_2 = 3 - 4i\ ;\ z_3 = -3 - 4i\ ;\ z_4 = 3 + 4i$$

   na fórmula polar.

   (b) potência Calcule z^2 *com* $z = r(cos\theta, sen\theta)$.

   (c) potência Suponha que a expressão encontrada para z^2 *também valha para* z^n. *Escreva esta expressão. Deduza a expressão de* z^{n+1}.

   Resposta Este exercício mostra, por indução finita a fórmula de Moivre

   $$z = r(cos\theta, sen\theta) \Rightarrow z^n = r^n(cos(n\theta), sen(n\theta))$$

   (d) Use a fórmula de Moivre para expressar $cos(3\theta)$ *em função de* $cos(\theta), sen(\theta)$.

Solução 1

$$cos(3\theta) = \mathcal{R}e((cos(\theta) + isen(\theta))^3 \tag{1.53}$$
$$(cos(\theta) + isen(\theta))^3 = \tag{1.54}$$
$$= cos(\theta)^3 + 3icos(\theta)^2 sen(\theta) - 3cos(\theta)sen(\theta)^2 - isen(\theta)^3 = \tag{1.55}$$
$$= cos(\theta)^3 - 3cos(\theta)sen(\theta)^2 + (3cos(\theta)^2 sen(\theta) - sen(\theta)^3)i \tag{1.56}$$
$$cos(3\theta) = cos(\theta)^3 - 3cos(\theta)sen(\theta)^2 \tag{1.57}$$

4. *As raizes de um número complexo*

   (a) *forma polar* *Use a fórmula de Moivre calcular* $\sqrt[3]{z_i}$ *com*

   $$z_1 = 4 + 3i \ ; \ z_2 = 3 - 4i \ ; \ z_3 = -3 - 4i \ ; \ z_4 = 3 + 4i$$

5. *Ache todos os valores de* $z \in \mathbf{C}$ *tal que* $z^2 + |z| = 0$.

6. *Encontre todos os complexos* z *que satisfaçam à condição*

   $$|z - 25i| < 15$$

7. *Qual o valor máximo do módulo do número complexo* z *se*

   $$|z + \frac{1}{z}| = 1$$

8. *Resolva a equação* $(1 - i)^x = 2^x$. **Solução:**

   $$(1 - i)^x = 2^x \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow |1 - i|^x = 2^x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^x$$

   Mas a última igualdade somente é possível para $x = 0$.

9. *Mostre que vale a fórmula do binômio de Newton*

   $$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{(n-k)} \ ; z, w \in \mathbf{C}$$

10. *Inteiros de Gauss*

    Definição 7 *Inteiros de Gauss*

    Chamamos de Inteiros de Gauss *ao conjunto* $Z + iZ$ *de todos os números complexos com* parte real *e* parte imaginária *inteiras.*

    (a) *Anel dos inteiros de Gauss* *Verifique que o conjunto dos inteiros de Gauss com a adição e multiplicação dos complexos é um anel.*

    Solução

    $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ *é um corpo, como* $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ *mas se fizermos a restrição de coordenadas inteiras para os números complexos deixa de existir o inverso multiplicativo, portanto em* $\mathbf{Z}+i\mathbf{Z}$ *não vale a propriedade da existência do inverso multiplicativo e assim* $(\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}, +, \cdot)$ *é um anel, comutativo com unidade.*

(b) *Prove que se z for um* inteiro de Gauss *então qualquer potência inteira de z também será um* inteiro de Gauss.

Solução

Isto é consequência direta do Teorema do Binômio de Newton. Logo z^n é um inteiro de Gauss.

(c) *Prove que para todo número complexo e todo inteiro n vale*

$$(|z|^n) = |z^n|$$

Solução:

Usando a fórmula de Abel-Euler temos

$$z = r(cos(\theta) + isen(\theta)) \ ; \ z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$
$$|z| = r \ ; \ |z^n| = r^n = |z|^n$$

Observe que n não precisa ser inteiro.

(d) *Verifique, em particular, que se z for um inteiro de Gauss, então* $|z^2|^n \in \mathbf{Z}$.

(e) *Se* $a, b, n \in \mathbf{Z}_+$, *prove que existem inteiros* x, y *tais que*

$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

Solução:

O módulo de um inteiro de Gauss *não será, em geral, um inteiro, mas o o quadrado do seu módulo será um número inteiro.*

Considere $z = a+bi$ um inteiro de Gauss, construído com os inteiros a, b dados, e um número inteiro n também dado.

$$z = a + bi \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$
$$z, z^n, (z^n)^2 \text{ são inteiros de Gauss}$$
$$\exists \ x, y \in \mathbf{Z}; z^n = x + iy \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$
$$(|z|^n)^2 = (|z|^2)^n = (a^2 + b^2)^n$$
$$(|z|^n)^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$$
$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

Os inteiros x, y são as partes reais e imaginárias *de z^n quando $z = a+bi \in \mathbf{Z}+i\mathbf{Z}$. Por exemplo, considere $a, b, n = 2, 3, 4$ nesta ordem.*

$$z = a + bi = 2 + 3i \Longrightarrow z^4 = (2 + 3i)^4 = -(119 + 120i)$$
$$(a^2 + b^2)^n = 28561 = 119^2 + 120^2$$
$$\text{os inteiros procurados } x, y \text{ são } 119, 120$$

11. *Prove que se* $z + \frac{1}{z} = 2cos(\alpha)$ *então*

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2cos(n\alpha)$$

Solução:

$$z + \frac{1}{z} = 2cos(\alpha) \in \mathbf{R} \Longrightarrow$$
$$z \in \mathbf{S}^1 \equiv z = cos(\alpha) + isen(\alpha)$$
$$z^n = cos(n\alpha) + isen(n\alpha)$$
$$\frac{1}{z^n} = cos(n\alpha) - isen(n\alpha)$$
$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2cos(n\alpha)$$

1.4.1 Para melhorar a arte de fazer contas

Nenhum dos exercícios abaixo será utilizado em qualquer ponto deste livro, no futuro, você pode, tranquilamente, ignorá-los.

Exercícios 1 *Desafios...*

1. *Escreva na forma polar* $z = cos(\theta) + cos(\phi) + i(sin(\theta) + sin(\phi))$
2. *Sendo* $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^4-1}$ *calcular* $f(2+3i)$.
3. *Mostre que se*
$$(z-p)(\overline{z} - \overline{p}) = p\overline{p}$$
então o ponto z *descreve um círculo de centro no ponto* p *passando pela origem dos eixos.*
4. *Considere* $w = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})$. *Mostre que se* z_1, z_2, z_3 *satisfizerem a relação*
$$z_1 + wz_2\overline{w}z_3 = 0$$
então eles são, respectivamente, paralelos aos lados de um triângulo equilátero.
5. *Um número complexo varia mas seus módulo fica compreendido entre* 1 *e* 6. *Calcule o* módulo máximo[1] *e o* módulo mínimo *da função*
$$f(z) = z^2 + 3z.$$
6. *Se* $z = 2 + i(w - \frac{1}{w})$ *calcule as partes reais e imaginárias de* z *em função das partes reais e imaginárias de* w. *Descreva o lugar geométrico do ponto* w *quando* $z \in \mathbf{R}$.
7. *Prove que se* $|z| = 1$ *então* $\mathcal{R}e(\frac{1-z}{1+z}) = 0$

[1] o maior e o menor valor do módulo de $f(z)$