Parte III

Solução dos exercícios

Capítulo 7

Soluções dos exercícios

7.1 Propriedades das funções lineares afins

1. <u>(ex. 1, página 53)</u> Listagem das propriedades das funções lineares afins

   (a) <u>função linear associada</u> Se f for uma função *linear afim* então existe uma função linear g, chamada *associada*, e uma matriz constante $\mathcal{B}$ tal que

   $$f(X) = g(X) + \mathcal{B} \equiv f(X) - \mathcal{B} = g(X)$$

   Dem: Pela definição de função linear afim **q.e.d .**

   (b) <u>imagem de combinações lineares</u> As funções lineares afins transformam *combinações lineares* em translações de *combinações lineares*.

   Dem: $f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) - \mathcal{B}$ é a função linear g associada, então

   $$g(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 g(X_1) + \lambda_2 g(X_2) \tag{7.1}$$
   $$f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) - \mathcal{B} = \lambda_1 g(X_1) + \lambda_2 g(X_2) \tag{7.2}$$
   $$f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 g(X_1) + \lambda_2 g(X_2) + \mathcal{B} \tag{7.3}$$
   $$\tag{7.4}$$

   q.e.d .

   (c) As funções lineares afins *preservam combinações lineares* a menos de uma translação.

   Dem: é uma reformulação da propriedade anterior. **q.e.d .**

   (d) As funções lineares afins *transformam segmentos de reta em segmentos de reta*

   Dem: Considere um segmento de reta $\overline{PQ}$. A imagem por f de $\overline{PQ}$ é

   $$f(\overline{PQ}) = g(\overline{PQ}) + \mathcal{B}$$

   mas como g é linear, $g(\overline{PQ})$ é um segmento de reta e $\mathcal{B}$ é a "matriz translação", portanto a translação, por $\mathcal{B}$ de um segmento de reta, outro segmento de reta. **q.e.d .**

2. (ex. 2, página 53)

   $0 = x - x$ para um vetor x qualquer, logo, se f for linear:

$$f(0) = f(x - x) = f(x) - f(x) = 0$$

3. (ex. 3, página 53)

   Se f for linear afim, então existe uma função linea associada g tal que $f(X) = g(X) + \mathcal{B}$.

$$f(0) = g(0) + \mathcal{B} = 0 \longrightarrow f(0) = \mathcal{B} = 0$$

   o termo independente $\mathcal{B}$ é zero.

4. (ex. 4, página 53)

   Dem : Considere uma função linear afim f e a função linear g que lhe é associada.

   Pelo item anterior do *laboratório*, a imagem dos lados do polígono, são segmentos de reta formando uma poligonal fechada.

   A convexidade: Considere um segmento $\overline{PQ}$ no interior do polígno-pre-imagem. A imagem $f(\overline{PQ})$ é outro segmento de reta. Resta apenas saber se $f(\overline{PQ})$ está no interior da imagem do polígono. Vamos resolver esta questão num caso particular, quando o polígono for plano.

   Seja Ω o polígono cuja imagem queremos calcular e $f(\Omega)$ a sua imagem. Seja $P \in \Omega$ e vamos calcular o o índice de $f(P)$ relativamente a imagem da fronteira do polígono, $f(\partial\Omega)$. Como f é uma *mudança de variável* e o seu determinante pode ser nulo, então é melhor partir do índice de P relativamente a curva $\partial\Omega$:

$$I = \frac{1}{2pi} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{dz}{z-P} \tag{7.5}$$

$$I = \frac{1}{2pi} \int\limits_{f(\partial\Omega)} \frac{dw \det(J(f))}{w-f(P)} \tag{7.6}$$

$$w = f(z) \tag{7.7}$$

$$\tag{7.8}$$

   Vemos que se o $\det(J(f)) \neq 0$ então a integral no segundo membro tem que ser diferente de zero e assim o índice de $f(P)$ relativamente à curva $f(\partial\Omega)$ é não nulo o que mostra que $f(P)$ é um ponto interior da image, se P for ponto interior da pre-imagem.

   q.e.d .

5. (ex. 5, página 53)

   Porque a imagem de uma função linear afim é uma translação, um movimento rígido que não altera a semelhanca dos polígonos.

7.2 Sistemas lineares - Solucao dos exercícios

1. (ex. 1, pag. 61)

Por definição, o momento de um corpo é sua massa pelo raio (comprimento do braço) que sustenta o corpo. Lendo o gráfico (fig. 2.3) página 62, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} 40h + 15c & = 2 * 50 = 100 \\ 25c & = 2 * 25 + 50h = 50 + 50h \end{cases} \tag{7.9}$$

$$\begin{cases} 40h + 15c & = 100 \\ 25c & = 50 + 50h \end{cases} \tag{7.10}$$

$$\begin{pmatrix} 40 & 15 \\ 50 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

Cuja solução com *octave* é

```
octave:1> a = [40,15;-50,25]
a =

  40  15
  -50  25

octave:2> b = [100;50]
b =

  100
   50
octave:3> a\b
ans =

  1
  4

h= 1; c = 4
```

As duas outras massas são $1.00kg, 4.00Kg$.

2. (ex. 8, pag. 61)

   Aplicando o princípio do equilíbrio dos átomos antes e depois de uma reação química aos componentes C, H, N, O

   $$xC_7H_8 + yHNO_3 \longrightarrow zC_7H_5O_6N_3 + wH_2O.$$

   temos o sistema (estamos comparando as quantidade de átomos por substância, em cada uma das equações)

   $$\begin{cases} 7x & = 7z \\ 8x + y & = 5z + 2w \\ y & = 3z \\ 3y & = 6z + w \end{cases} \tag{7.12}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 & 0 \\ 8 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

em que na última linha a matriz do sistema foi escalonada (você pode encontrar resultados diferentes, mas equivalentes).

Resolvendo as equações, a partir da última, temos:

$$w = 3z; y = 3z; x = 3x$$

o que nos dá as equações paramétricas

$$(z, 3z, z, 3z)$$

para a reta, *espaço vetorial de dimensão 1*, núcleo da transformação linear representada pela matriz, solução do sistema homogêneo.

3. (ex. 3 , página 62)

```
-->function u = f(x)
-->y = x
-->u(1) = fix(y/50)
-->y = y - u(1)*50
-->u(2) = fix(y/20)
-->y = y - u(2)*20
-->u(3) = fix(y/10)
-->endfunction

-->f(70)
 ans  =

  !   1. !
  !   1. !
  !   0. !

-->f(190)
    ans  =

     !   3. !
     !   2. !
     !   0. !
-->f(230)
```

```
ans  =

 !   4. !
 !   1. !
 !   1. !
```

4.

5.

7.3 Estrutura do R^2 - Solução dos exercícios

1. (ex. 5, página 69)

   Considere o conjunto $\mathcal{E}$ de todas as funções reais definidas no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (a) Prove que $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real.
   Considere $f \in \mathcal{E}$ e consequentemente

   $$f(1), f(2), f(3), f(4), f(4)$$

   são números reais. Defina uma função de

   $$\mathcal{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{R}^5$$

   tal que

   $$f(i) \mapsto x_i = f(i) \; ; x \in \mathbf{R}^5$$

   Prove que

   (a) Φ é linear
      i. $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$
      ii. $\Phi(\lambda f) = \lambda\Phi(f) \; ; \forall \lambda \in \mathbf{R}$

   (b) $\Phi(0) = 0$ em que o argumento de Φ tem que ser a função zero (identicamente nula).

   (c) $\Phi(f) = 0$ se e somente se $f = 0$

   (d) Mostre que Φ é bijetiva.

   (a) $\mathcal{E}$ é um espaço vetorial. Temos mostrar que $(\mathcal{E}, +)$ é um grupo abeliano.
   $\boxed{\textbf{Dem}}$: Primeiro temos que exibir o modo de somar os vetores f, g. Dadas duas funções f, g uma nova função, $H = f + g$ se define por

   $$H(i) = f(i) + g(i) \; ; \; i \in \{1, 3, 3, 4, 5\}$$

i. <u>A associatividade</u> da adição de números reais se transmite para a operação assim definida:

$$\forall i \; f(i) + (g(i) + h(i)) = (f(i) + g(i)) + h(i)$$

logo

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

ii. <u>A comutatividade</u> da adição de números reais se transfete para a operação com demonstração semelhante a que fizemos acima para a associatividade.

iii. <u>Elemento neutro</u> A função identicamente nula

$$0 : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \mathbf{R} \; ; \; 0 : i \mapsto 0$$

somada a qualquer outra função f reproduz f sendo portanto o elemento neutro da adição de funções.

(b) <u>Inverso aditivo</u> considere uma função f definida em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e defina a função

$$\forall i \; ff(i) = -f(i).$$

Temos

$$\forall i \; ff(i) + f(i) = -f(i) + f(i) = 0$$

e assim ff é o inverso aditivo da função f. Obviamente, em vez usar a notação ff vamos usar a notação "$-f$" para a função inveso aditivo de f que existe para toda função do conjunto $\mathcal{E}$ e assim $(\mathcal{E}, +)$ é um grupo abeliano. $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Observação 16 *Dificuldades linguísticas e de comunicação*
Fica claro, na invenção que fizemos acima do nome ff para a função "$-f$" para escrever um pedaço da demonstração, uma dificuldade de comunicação *que permeia o ensino de Matemática. O leitor, ao ser exposto a um texto novo de Matemática, enfrenta a criação de novos objetos com o sentimento de que nós, os matemáticos, estamos criando complicações possivelmente inúteis. É difícil superar esta crise... estamos definindo novos objetos, os elementos do conjunto $\mathcal{E}$ que são muito semelhantes a números reais, mas que* não são números reais. *A adição parece a* a adição dos números reais *mas é uma nova operação definida num novo conjunto.*
No fundo o que se passa é a construção de novos objetos é feita com auxílio dos velhos*... vamos continuar o processo.*

Temos agora que demonstrar as propriedades do produto por escalar. *Primeiro* temos que definir o que é o "produto por um escalar". Dada uma função f, definimos

$$[\lambda f](i) = \lambda f(i)$$

e queremos demonstrar que

i. <u>associatividade à esquerda</u>
Por definição $[(\alpha\lambda)f](i) = (\alpha\lambda)f(i)$. À direita temos o número real "$f(i)$", para cada valor de $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ multiplicado pelo número real $(\alpha\lambda)$ e, propriedade dos números reais, isto é igual a

$$[(\alpha\lambda)f](i) = (\alpha\lambda)f(i) = \alpha(\lambda f(i))$$

A última expressáo define a função $[\alpha(\lambda f)]$ para um valor qualquer de $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ logo

$$(\alpha\lambda)f = \alpha(\lambda f).$$

ii. O elemento neutro da multiplicação não altera as funções por quem ele for multiplicado. O elemento neutro da mulplicação é a função identicamente 1:

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \ ; \ i \mapsto 1$$

Vamos chamar esta função de **1**. Temos

$$(\mathbf{1}f) : i \mapsto 1 \cdot f(i) = f(i)$$

provando o que queriamos, **1** não altera a função f.

iii. O elemento neutro da adição anula qualquer função que for por ele multiplicada. De fato, chamemos

$$\mathbf{0}$$

a função identicamente nula. Temos

$$(\mathbf{0}f) : i \mapsto 0 \cdot f(i) = 0$$

é a função identicamente nula.

iv. distributividade da multiplição por um escalar relativamente à adição. Queremos mostrar que

$$[f(g + h)] = [fg + fh]$$

De fato,

$$[f(g + h)] : i \mapsto f(i)(g(i) + h(i)) = f(i)g(i) + f(i)h(i)$$

que define a função $[fg+fh]$ provando a igualdade que queriamos provar.

Provamos assim que $\mathcal{E}$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos número reais.

Vamos agora discutir as propriedades da função

$$\Phi\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{R}^5$$

Vamos adotar uma notação melhor do que a proposta no exercício:

$$f(i) \mapsto f_i = x_i$$

(a) linearidade

$$[f+g] : i \mapsto f(i) + g(i) = f_i + g_i \tag{7.15}$$
$$\text{logo } \Phi([f+g]) = \Phi([f]) + \Phi([g]) \tag{7.16}$$
$$[\lambda f] : i \mapsto \lambda f(i) \tag{7.17}$$
$$\text{logo } \Phi([\lambda f]) = \lambda \Phi([f]) \tag{7.18}$$

provando a linearidade.

(b) imagem da função identicamente nula,$\Phi(0)$ é a énupla com todas as coordenadas nulas, logo $\Phi(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$

(c) imagem inversa do zero A única função que leva todo $i \in \{1, 3, 3, 4, 5\}$ em zero é a função identicamente nula, logo $\Phi(f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

(d) bijetividade Temos que demonstrar que Φ é injetiva e bijetiva:

i. injetividade Tome duas funzccões diferentes, $f \neq g$ então, para pelo menos um valor de $i \in \{1, 3, 3, 4, 5\}$ temos

$$f_i \neq g_i \equiv (f_1, f_2, f_3, f_4, f_i) \neq (g_1, g_2, g_3, g_4, g_i)$$

e portanto
$$\Phi(f) \neq \Phi(g)$$

ii. sobrejetividade Temos que mostrar que todo elemento de $\mathbf{R}^5$ tem uma imagem inversa (pré-imagem) via Φ. Mas qualquer énupla de $\mathbf{R}^5$ é um arranjo (possivelmente com repetição) dos elementos de $\mathbf{R}$ tomados cinco a cinco, e portanto uma função do conjunto $\{1, 3, 3, 4, 5\}$ em $\mathbf{R}$ que é a pre-imagem deste arranjo por Φ.

Moral da história, *o conjunto de todas as função definidas num conjunto finito é equivalente ao conjunto das enúplas de números reais,*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sendo n o número de elementos do tal conjunto finito, domínio das funções. Isto é um exemplo de *isomorfismo.*

2.

7.4 Espaço vetorial - Solução de alguns exercícios

1. (ex. 1), página 86 Complete o conjunto

$$\mathcal{E} = \{1 + x, 1 + x^2, x^2 + x^5\}$$

para obter uma base para o espaç$\mathbf{R}_5[x]$ dos polinômios de grau menor u igual a 5.

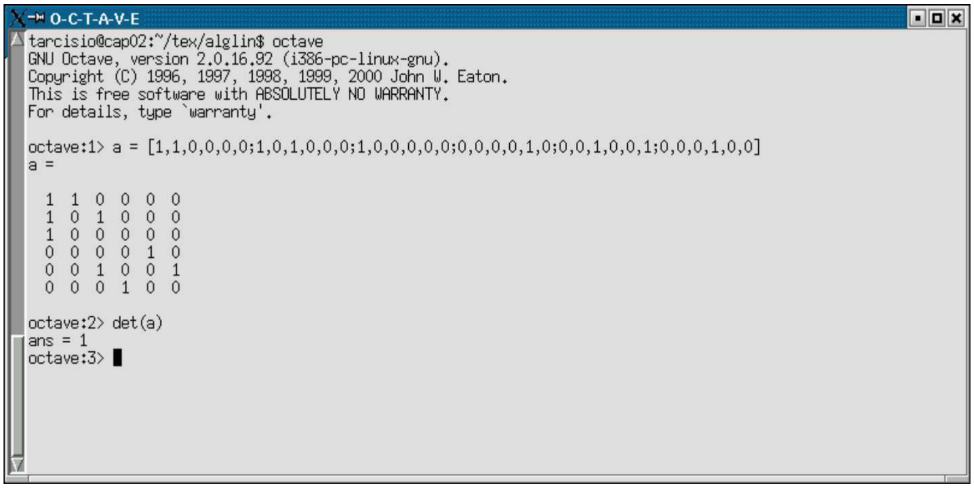

Figura 7.1: Cálculo do determinante com octave

Solução 6

$$\{1, 1+x, 1+x^2, x^4, x^3, x^2+x^5\}$$

Identificando um polinômio com seus coeficientes, este conjunto corresponde às enúplas

$$(1,0,0,0,0,0),(1,1,0,0,0,0),(1,0,1,0,0,0),(0,0,0,0,1,0)(0,0,0,1,0,0),(0,0,1,0,0,1)$$

Com octave*, podemos definir a matriz que tem estas linhas e calcular o determinante desta matriz, veja (fig. 7.1). Como o determinante é diferente de zero, então as linhas (e também as colunas da matriz) são l.i. portanto o conjunto de vetores é uma base para* $\mathbf{R}_5[x]$.

2. ex. 2, página 86 Verifique se o conjunto dos polinômios de grau exatamente 5 é um espaço vetorial.

   Solução 7 *Não é um espaço vetorial. Falha na existência do elemento neutro para adição, o polinômio identicamente zero.*

3. ex. 3, página 86 Verifique se o conjunto das funções reais definidas no conjunto $\{a, e, i, o, u\}$ é um espaço vetorial e encontre uma base para este espaço.

Solução 8 <u>*notação*</u> *Considerando que o alfabeto tem uma ordem, podemos entender que as letras a, e, i, o, u estão ordenadas e identificar uma função definida neste conjunto por uma sequência (ordenada) de 5 números reais: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ em que os números memorizam a ordem das letras:*

$$a \mapsto 1; 3 \mapsto 2; i \mapsto 3; o \mapsto 4; u \mapsto 5$$

Dadas duas tais seqüências, podemos definir a adição ponto a ponto *por:*

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \tag{7.19}$$
$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \tag{7.20}$$
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \tag{7.21}$$

(a) <u>*elemento neutro para adição*</u> *é a sequência de zeros*

$$(0, 0, 0, 0, 0).$$

(b) <u>*associatividade*</u> *Dadas tres seqüências, X, Y, Z o valor em $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de $X + (Y + Z)$ é*

$$x_i + (y_i + z_i) = (x_i + y_i) + z_i$$

sendo a expressão à esquerda o valor de $(X + Y) + Z$ portanto

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z.$$

(c) <u>*comutatividade*</u> *Dadas duas seqüências, X, Y o valor em $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de $x + y$ é*

$$x_i + y_i = y_i + x_i$$

sendo a expressão à esquerda o valor de $y + x$ portanto

$$x + y = y + x.$$

(d) <u>*inverso aditivo*</u> *Dada uma seqüência x a seqüência em que trocarmos todos os sinais dos valores de x*

$$(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$$

quando somada a seüência x vai produzir a seqüência nula, sendo portanto o inverso aditivo de x.

Provamos assim que o conjunto $\mathcal{F}$ das funções definidas no conjunto $\{a, e, i, o, u\}$ com a adição ponto a ponto, *é um grupo abeliano.*

As propriedades da multiplicação por um escalar.

(a) *a associatividade à esquerda Dados dois escalares* α, λ *e uma seüência* X,

$$\alpha(\lambda X)$$

em cada ponto $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *está definida naturalmente por*

$$\alpha(\lambda x_i)$$

mas agora temos o produto de tres números reais para os quais vale

$$(\alpha\lambda)x_i$$

que é o valor de

$$\alpha(\lambda X)$$

no ponto $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *portanto vale a associatividade à esquerda na multiplicação por escalares.*

(b) *o elemento neutro da multiplicação não não altera o multiplicando O elemento neutro aqui é o escalar* $1 \in \mathbf{R}$ *que multiplicado porque quaquer seüência* X, *reproduz esta.*

(c) *o elemento neutro da adição multiplicado por qualquer seüência* X *anula todas as coordenadas de* X *produzindo a seüência*

$$(0, 0, 0, 0, 0)$$

que é o elemento neutro da adição de vetores.

(d) *a distributividade da multiplicação por um escalar. Considere duas seüências* X, Y *e um escalar* λ *temos:*

$$\lambda(x_i + y_i) = \lambda x_i + \lambda y_i$$

porque todos são números reais. À esquerda temos o valor de λ *multiplicado por* $X + Y$ *em um ponto* $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e à direita temos a soma dos valores de* λX *e* λY *no ponto* $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *somados. Como sempre são iguais, para qualquer valor de* i *então*

$$\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$$

Vemos assim que o espaço $\mathcal{F}$ *das funções definidas no conjunto* $\{a, e, i, o, u\}$ *é um espaço vetorial. As funções*

$$E = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

são l.i. As contas são semelhantes as que poderiamos fazer para os elementos do $\mathbf{R}^5$. *E como identificamos as funções a um elemento do* $\mathbf{R}^5$ *podemos usar esta identificação para verificar que uma função qualquer vai ser obtida por combinação linear desta funções do conjunto* E *que é então uma base para* $\mathcal{E}$.

4. ex. 4, página 86

Solução 9 *Considere o sistema de equações*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 & = 0 \end{cases}$$

(a) *Prove que o conjunto das soluções deste sistema de equações é um espaço vetorial. Considere duas soluções do sistema*

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5).$$

Quer dizer que é verdade:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 & = 0 \end{cases} \tag{7.22}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 & = 0 \\ -3y_1 - 4y_2 - 9y_3 + 2y_4 + y_5 & = 0 \\ 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 + 2y_4 + y_5 & = 0 \\ 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 + 8y_4 + 2y_5 & = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 7y_4 + 9y_5 & = 0 \end{cases} \tag{7.23}$$

Podemos somar estes "dois sistemas", como somariamos duas equações lineares, linha a linha, respeitando a ordem dos índices. O resultado da soma é

$$\begin{cases} (x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) + 3(x_3+y_3) + 4(x_4+y_4) + 5(x_5+y_5) & = 0 \\ -3(x_1+y_1) - 4(x_2+y_2) - 9(x_3+y_3) + 2(x_4+y_4) + (x_5+y_5) & = 0 \\ 2(x_1+y_1) + 4(x_2+y_2) + 6(x_3+y_3) + 2(x_4+y_4) + (x_5+y_5) & = 0 \\ 3(x_1+y_1) + 6(x_2+y_2) + 9(x_3+y_3) + 8(x_4+y_4) + 2(x_5+y_5) & = 0 \\ (x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) + 3(x_3+y_3) + 7(x_4+y_4) + 9(x_5+y_5) & = 0 \end{cases}$$

sendo zero no segundo membro porque somamos primeiro membro com primeiro, segundo membro com segundo membro. Isto mostra que se os vetores X, Y forem solução do sistema homogêneo, também o vetor $X + Y$ é solução do sistema homogêneo. Quer dizer que o espaço de soluções é fechado para a soma de soluções.

Observação 17 *Produto de matrizes - distribuitivida*

A soma dos "dois sistemas" acima pode ser vista de um outro ângulo. Um "sitema de equações é um produto de matrizes:

$$
\begin{cases}
x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 &= 0\\
-3x_1-4x_2-9x_3+2x_4+x_5 &= 0\\
2x_1+4x_2+6x_3+2x_4+x_5 &= 0\\
3x_1+6x_2+9x_3+8x_4+2x_5 &= 0\\
x_1+2x_2+3x_3+7x_4+9x_5 &= 0
\end{cases} \tag{7.24}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ -3 & -4 & -9 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 6 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 9 & 8 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} ; c = \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5 \end{pmatrix} \tag{7.25}
$$

Se chamarmos a matriz de $\mathcal{A}$ o produto de matrizes acima pode ainda ser escrito de forma mais compacta:

$$\mathcal{A}X = C$$

e como o sistema é homogêneo, o vetor de dados é $C = 0$.
Retornando agora a "soma dos sistemas", com esta notação compacta, o que fizemos foi:

$$\mathcal{A}(X+Y) = B \equiv \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y = B$$

que prova a distributividade do produto de matrizes pela soma de vetores (ou soma de matrizes). Quer dizer, demonstramos o teorema:

Teorema ***38*** *Distributividade do produto de matrizes com a adição*
Seja $\mathcal{A}$ uma matriz n x m e $X, Y \in \mathbf{R}^m$. O produto da matriz $\mathcal{A}$ pela soma dos vetores $X + Y$ é distributivo

$$\mathcal{A}(X+Y) = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y$$

Vamos verificar as propriedades da adição de soluções

i. *Elemento neutro* *Uma solução deste sistema de equações é um vetor*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

Como o sistema é homogn̂eo, a énupla nula $(0,0,0,0,0)$ *é solução, pelo* teorema dos sistemas homogêneos.

ii. *Inverso aditivo* *Suponha que uma enúpla destas satisfaça à equação. Se multiplicarmos o sistema por -1 não o altera (porque êle é homogêneo) o que mostra que*

$$-x = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$$

é solução, portanto o inverso aditivo de uma solução está também no espaço solução. *Na verdade isto vale para qualquer escalar pelo* segundo teorema dos sistemas homogêneos *isto vale para qualquer escalar λ*

iii. <u>*associatividade*</u> *A soma de vetores é associativa. Se estes vetores forem solução já vimos que a soma deles é também solução. Se não valesse a associatividade no espaço solução seria uma contradição.*

iv. <u>*comutatividade*</u> *O argumento anterior sobre* associatividade *se aplica aqui.*

Verificando as propriedades do produto por um escalar*.*

i. <u>*Produto por um escalar de uma solução*</u> *é também solução pelo* <u>segundo teorema dos sistemas homogêneos</u>*. Vamos escrever o sistema como um produto de matrizes*

$$\mathcal{A}X = 0$$

em que $\mathcal{A}$ *é a matriz do sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -9 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Acabamos de provar, usando o segundo teorema dos sistemas homogêneos *que* $\mathcal{A}X = 0 \Rightarrow A(\lambda X) = 0 = \lambda \mathcal{A}X$

ii. <u>*Associatividade á esquerda*</u> *do produto por escalar. Dados dois escalares* λ, α *e uma solução* X *do sistema, provamos que* λX *é solução. Consequentemente,* $\alpha(\lambda X) = (\alpha\lambda)X$ *é solução e não pode ser uma solução diferente, logo no conjunto das soluções vale a* associatividade à esquerda *da multiplicação por um escalar.*

iii. <u>*Distribuitividade do produto por escalar*</u> *relativamente à adição de soluções do sistema.*
Considere duas soluções X, Y *do sistema de equações, e um escalar qualquer,* λ*. Então* $\lambda X, \lambda Y$ *são também soluções, assim como também a soma destas soluções*

$$\lambda X + \lambda Y$$

é também solução. Para os vetores do $\mathbf{R}^5$ *vale*

$$\lambda X + \lambda Y = \lambda(X + Y)$$

provando que no espaço das soluções do sistema vale a distributividade da multiplicação por um escalar relativamente à adição de vetores*.*

Provamos assim que o eapaço de soluções *de sistema de equações lineares é um* espaço vetorial*.*

(b) *Verifique que os "escalares" x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 combinados com os vetores-coluna, da matriz do sistema, geram o espaço solução deste sistema. Calcule a dimensão do espaço solução.*

Já vimos que o sistema pode ser escrito de forma compacta assim:

$$\mathcal{A}X = B$$

em que $\mathcal{A}$ é a matriz do sistema, X é o vetor-variável, e B é o vetor de dados.

Mas analisando a forma expandida do sistema, (veja abaixo), podemos observar que

- *a primeira coordenada do vetor-variável, multiplica a primeira coluna da matriz;*
- *a segunda coordenada do vetor-variável, multiplica a segunda coluna da matriz;*
- *e sucessivamente..*

de formas que podemos interpretar o produto $\mathcal{A}x$ como uma soma

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_5a_5$$

em que agora estamos considerando a_i como a coluna de ordem i da matriz $\mathcal{A}$, combinação linear das colunas da matriz com os escalares x_i e interpretamos agora o sistema como

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_5a_5 = b$$

portanto o vetor b é uma combinação linear dos vetores-coluna da matriz $\mathcal{A}$.

O sistema somente terá solução se b for um elemento do espaço gerado pelos vetores

$$a_1, a_2, \cdots, a_5$$

os vetores coluna da matriz, como queriamos provar.

A dimensão do espaço solução será então o número máximo de vetores l.i. dentre os vetores coluna da matriz. Para encontrar este número calculam-se os determinantes menores da matriz até achar um determinante diferente de zero. Se o determinante da matriz já for diferente de zero, então a imagem tem dimensão $n = 5$. Este número, a dimensão da imagem, é denominado de `posto` *da matriz.*

(c) *Verifique que o sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = b_1 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 & = b_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 & = b_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = b_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 & = b_5 \end{cases}$$

somente pode ter solução se o vetor $\vec{b}$ de dados pertencer ao espaço gerado pelos vetores-linha da matriz do sistema.

É consequência do item anterior. Se o vetor de dados b não pertencer ao espaço gerado pelos vetores coluna, a combinação linear

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_5a_5 = b$$

não pode ser verdadeira.

5. <u>ex. 5, página 87</u>

Mostre que o conjunto-solução da equação diferencial

$$y'' + a_0y' + a_1y = 0$$

é um espaço vetorial.

Solução 10 *Respeitando cuidadosamente a* departamentalização *das ciências e dos currículos, observe que não vamos resolver a equação diferencial.*

Por coïncidência esta é uma atitude "moderna" no estudo das equações diferenciais, primeiro estudar-lhe as propriedades, depois resolvê-las usando um padrão adequado.

Começamos verificando se, dadas duas soluções y_1, y_2, a soma delas é ainda uma solução. Vamos somar duas equações:

$$y_1^{''} + a_0y_1^{'} + a_1y_1 = 0 \tag{7.26}$$
$$y_2^{''} + a_0y_2^{'} + a_1y_2 = 0 \tag{7.27}$$
$$(y_1 + y_2)^{''} + a_0(y_1 + y_2)^{'} + a_1(y_1 + y_2) = 0 \tag{7.28}$$
$$\tag{7.29}$$

e vemos que $y_1 + y_2$ satisfaz à equação diferencial, porque a derivada da soma é a soma das derivadas, *mesmo para a segunda derivada, e o termo independente é zero (este fato é crucial, temos uma equação homogênea). Vamos agora verificar se o* espaço solução *é um* espaço vetorial

- *<u>Adição é comutativa</u> Mas $y_1 + y_2$ são funções reais, e a soma de funções reais é comutativa.*
- *<u>existência do elemento neutro para adição</u> O elemento neutro, na soma de funções é a função identicamente nula. Qualquer derivada desta função é zero o que mostra que ela satisfaz èquação diferencial .*
- *<u>existência do inverso aditivo</u> Vamos verificar se, y for uma solução desta aequação diferencial, se também $-y$ é solução. Se multiplicarmos a equacção por um número real qualquer λ temos*

$$\lambda y'' + \lambda a_0y' + \lambda a_1y = 0 \equiv (\lambda y)'' + a_0(\lambda y)' + a_1(\lambda y) = 0$$

porque a derivada de λy é $\lambda y'$, *inclusive para derivadas de ordem superior. Também estamos usando a comutatividade do produto dos escalares e a associatividade com o produto envolvendo funções, (identifique aonde) .*

- *associatividade da adição Se* y_1, y_2, y_3 *forem três soluções da equação diferencial, queremos saber se*

$$y_1 + (y_2 + y_3) = (y_1 + y_2) + y_3$$

mas a soma de funções é feita ponto a ponto, quer dizer, consideramos os números reais

$$y_1(t) + (y_2(t) + y_3(t)) = (y_1(t) + y_2(t)) + y_3(t)$$

para os quais vale a associtavidade, logo a soma de funções é associativa, (dizemos, de soluções...)

Isto torna o espaço-solução, com a adição, um grupo comutativo.

Já verificamos acima que a multiplicação por um escalar está definida no espaço-solução. Vamos ver as propriedades deste produto.

associatividade à esquerda A justificativa é a mesma que usamos para a associatividade da adição*, no fundo estamos multiplicando os escalares* λ, α *pelo número real* $y(t)$ *e logo vale*

$$\lambda(\alpha y(t)) = (\lambda\alpha)y(t)$$

para todo t *portanto também é verdade*

$$\lambda(\alpha y) = (\lambda\alpha)y$$

o elemento neutro da multiplicação não altera o multiplicando, por argumento semelhante ao que usamos acima.

o elemento neutro da adição torna nulo o multiplicando, por argumento semelhante ao que usamos acima.

a distributividade da multiplicação por um escalar por argumento semelhante ao que usamos acima.

Provando assim que o conjunto-solução da equação diferencial

$$y'' + a_0 y' + a_1 y = 0$$

é um espaço vetorial.

Por esta razão, as equações diferenciais com este formato,

$$y^{(n)} + a_0 y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y = 0$$

se chamam *equações diferenciais lineares de ordem* n. Elas podem ser transformadas em um *sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem* e o espaço solução destas equações tem dimensão menor ou igual a n.

6. (ex. 1, página 80) Os valores de $\underline{a}$ que fazem os vetores

$$e_1 = (a, 3, 6), e_2 = (1, a, -2), e_3 = (0, -1, 2)$$

linearmente dependentes.

Solução 11 *O* $det(e_1, e_2, e_3) = 0$

7.5 Sistemas Lineares- solucao

1. (ex. 1, pag. 114)

Encontramos o sistema abaixo

$$\begin{cases} 7x & = 7z \\ 8x + y & = 5z + 2w \\ y & = 3z \\ 3y & = 6z + w \end{cases} \tag{7.30}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 & 0 \\ 8 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

cuja solução com *octave* é

```
octave:1> a=[7,0,-7,0;8,1,-5,-2;0,1,-3,0;0,3,-6,-1]
a =

   7   0  -7   0
   8   1  -5  -2
   0   1  -3   0
   0   3  -6  -1

octave:2> b = [0;0;0;0]
b =

  0
  0
  0
  0

octave:3> a\b
```

```
warning: matrix singular to machine precision, rcond = 1.09339e-18
ans =

  0
  0
  0
  0

octave:4> rank(a)
ans = 3
octave:5>
```

Um sistema homogêneo possível, indeterminado, cujo posto *octave* calcula como sendo 3 e portanto, pelo Teorema da *liberdade e do posto* o núcleo tem dimensão 1 sendo uma reta. Este resultado foi obtido ao resolvermos o (ex. 8), página 61. O método usado foi o do escalonamento da matriz que é chamado também de *método de Gauss* e que consiste em subtrações sucessivas das linhas da matriz para a eliminação do máximo de variáveis até ter apenas duas nas últimas equações. Este método pode também ser chamado de *eliminação das variáveis.* No método de Gauss se objetiva deixar o primeiro coeficiente não nulo de cada equação sendo 1. Veja *escalonamento* no índice remissivo.

Comentando a natureza da solução (somente um químico poderia fazê-lo de forma exemplar), se não houver átomos das substâncias reagentes resultaria em nenhum resultado, portanto a solução *zero* do problema é de se esperar. Consulte um químico para entender por que a equação da reta-solução é a já obtida:

$$(z, 3z, z, 3z).$$

2. (ex. 3, página 114)

   (a) linearidade de F Considere dois polinômios p_1, p_2

$$F(p_1(t)) = (2t-a)p_1(t+1) - t^2p_1^{'}(t) \tag{7.32}$$
$$F(p_2(t)) = (2t-a)p_2(t+1) - t^2p_2^{'}(t) \tag{7.33}$$
$$F(p_1(t)+p_2(t)) = \tag{7.34}$$
$$= (2t-a)[p_1(t+1)+p_2(t+1)] - t^2[p_1^{'}(t)+p_2^{'}(t)] = \tag{7.35}$$
$$= (2t-a)p_1(t+1) - t^2p_1^{'}(t) + \tag{7.36}$$
$$+(2t-a)p_2(t+1) - t^2p_2^{'}(t) = \tag{7.37}$$
$$= F(p_1(t)) + F(p_2(t)) \tag{7.38}$$
$$F(\lambda p(t)) = \tag{7.39}$$
$$= (2t-a)\lambda p(t+1) - t^2(\lambda p)'(t) = \tag{7.40}$$
$$= \lambda[(2t-a)p(t+1) - t^2p'(t)] = \tag{7.41}$$

$$= \lambda F(p(t)) \tag{7.42}$$

$$\tag{7.43}$$

mostrando que F é linear.

(b) Encontre a matriz $\mathcal{A}$ de F relativamente à base

$$1, t, t^2$$

As colunas da matriz procurada são os valores do operador, calculados em cada um dos elementos da base,

$$F(1), F(t), F(t^2)$$

e expandidos segundo a mesma base.

$$F(1) = (2t - a) = \begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.44}$$

$$F(t) = t^2 + (2-a)t - a = \begin{pmatrix} -a \\ 2-a \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.45}$$

$$F(t^2) = (4-a)t^2 + (2-2a)t - a = \begin{pmatrix} -a \\ 2-2a \\ 4-a \end{pmatrix} \tag{7.46}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 2 & (2-a) & 2(1-a) \\ 0 & 1 & (4-a) \end{pmatrix} \tag{7.47}$$

(c) <u>$Ker(F)$</u>

$$\begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 2 & (2-a) & 2(1-a) \\ 0 & 1 & (4-a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.48}$$

$$\begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 0 & -a^2 & -2a^2 \\ 0 & 1 & (4-a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.49}$$

$$\begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 0 & -a^2 & -2a^2 \\ 0 & 0 & 2a^2 - a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.50}$$

- $a \notin \{0, 2\} \Longrightarrow Ker(F) = \{0\}$
- $a = 0$ o núcleo do operador é

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \ ; \ a_0 - 3a_2 = 0$$

- $a = 2$ o núcleo do operador é

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \ ; \ a_1 + 2a_2 = 0$$

(d) (ex.4, pág. 115

Método: produto escalar de um vetor paralela à reta por um vetor ortogonal ao plano.

- eliminação dos parâmetros Eliminando os parâmetros s, t na equação paramétrica do plano:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.51}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y - x \\ 2x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.52}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y - x \\ 2(2x - z) + y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.53}$$

$$2(2x - z) + y - x = 3x + y - 2z = 1 \tag{7.54}$$

- Ângulo entre vetor ortogonal ao plano e um vetor da reta
  i. Vetor ortogonal ao plano

$$\Delta = (3, 1, -2)$$

  ii. Vetor paralelo à reta

$$u = (1, 0, 2)$$

  iii. produto escalar $< \Delta, u >$

$$\frac{< \Delta, u >}{||\Delta||||u||} = cos(\theta) = \frac{3 + 0 - 4}{\sqrt{9 + 1 + 4}\sqrt{1 + 4}} = \frac{-1}{\sqrt{70}}$$

O ângulo procurado é $\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$.

3. (ex. **??**, página **??**)

Usando *octave* temos:

```
octave:1> a = [1,-2;0,1]
a =

   1  -2
   0   1
```

```
octave:2> a*a
ans =

   1  -4
   0   1

octave:3> a = a*a
a =

   1  -4
   0   1

octave:4> a = a*a
a =

   1  -8
   0   1
```

conduzindo-nos à hipótese $\begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Demonstração da hipótese, por indução</u>

- $P_1 : A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é verdade.
- <u>Hipótese de indução.</u> $P_n : A_n = \begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. <u>Recursão</u> $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$

$$A_{n+1} = A_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2^n - 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2^{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

confirmando a hipótese de indução.

5. <u>(ex.**??**, página **??**)</u> Escalonando a matriz temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & |a \\ 1 & 1 & 3 & |a+2 \\ 2 & -2 & (a+1) & |(a+1) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & |a \\ 0 & 2 & 2 & |2 \\ 0 & 0 & (a-1) & |1-a \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

Se $a \neq 1$ o sistema tem solução única igual $(a+3, 3, -1)$ Se $a = 1$ a dimensão do núcleo será 1, a solução é a reta

$$(2y, y, 1-y) \ ; \ y \in \mathbf{R}$$

6. (ex. 7, página 115)

Solução 12 *A introdução da "variável" z permite escrever a derivada segunda em duas etapas:*

$$y' = z \; ; y'' = z' = -py' - qy = -pz - qy$$

portanto o sistema de duas equações representa a equação diferencial de segunda ordem inicial. Se considerarmos agora o vetor $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ *podemos escrever a equação matricial que representa o sistema de equações acima como*

$$X' = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q & -p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \tag{7.56}$$

$$X' = \mathcal{A}X \tag{7.57}$$

7.6 Matrizes não singulares-Solução dos exercícios

1. (ex. 4, página 143)

Solução 13 *Se* $\mathcal{T}$ *for uma matriz inversível então podemos recuperar o sistema inicial com a seqüência de operações:*

$$\begin{gathered}
\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T} = \mathcal{I} \text{ a matriz identidade} \\
\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{B} \longleftrightarrow \mathcal{T}\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{T} \longleftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{T} \\
\mathcal{T}x = y \; ; \; \mathcal{T}b = c \longleftrightarrow x = \mathcal{T}^{-1}y \; ; \; b = \mathcal{T}^{-1}c \\
\mathcal{B}y = c \\
\mathcal{T}^{-1}\mathcal{B}y = \mathcal{T}^{-1}c \\
\mathcal{T}^{-1}\mathcal{B}(\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1})y = \mathcal{T}^{-1}c \\
(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1}y) = \mathcal{T}^{-1}c \\
\mathcal{A}(\mathcal{T}^{-1}y) = \mathcal{T}^{-1}c \\
\mathcal{A}x = b
\end{gathered}$$

O diagrama (fig. 5.1) página 132, mostra o que fizemos, a matriz inversível $\mathcal{T}$ *se chama,* matriz de mudança de base*, ela altera o referencial do espaço.*

---

2. (ex. 2, página 145)

Solução 14 *(a) Com* `scilab`

```
-->A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
 A  =

!   1.    2.    3. !
!   4.    5.    6. !
!   7.    8.    9. !

-->U1 = [1,0,0;4,-1,0;0,0,1]
 U1  =

!   1.    0.    0. !
!   4.  - 1.    0. !
!   0.    0.    1. !

--> U1*A

!   1.    2.    3. !
!   0.    3.    6. !
!   7.    8.    9. !
```

(b)

```
-->U2 = [1,0,0;0,1,0;7,0,-1]
-->U2*U1 //  composta de operacoes U1*U2
 ans  =

!   1.    0.    0. !
!   4.  - 1.    0. !
!   7.    0.  - 1. !

-->  U2*U1*A

!   1.    2.    3.  !
!   0.    3.    6.  !
!   0.    6.    12. !
```

(c) **Resposta:** *O esquema final é:* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. (ex. 4b, página 147)

Solução 15 *Se $\mathcal{A}$ for uma matriz* não singular*, então sua inversa, $\mathcal{A}^{-1}$ existe e podemos efetuar as seguintes operações equivalentes, se a matriz T for quadrada:*

$$T\vec{x} = \vec{b} \equiv \mathcal{A}T\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \mathcal{A}T\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv$$
$$\equiv T'\vec{x'} = \vec{b'}$$

Como todas as operações feitas acima são inversíveis, (porque podemos efetuar as operações inversas), então os dois sistemas são equivalentes, quer dizer, se resolvermos $T'\vec{x'} = \vec{b'}$ então $x' = \mathcal{A}x \equiv x = \mathcal{A}^{-1}x'$ podemos obter o valor de x com uma simples multiplicação de matrizes. Isto equivale na prática a ter trocado as variáveis, (coordenadas), resolvido um novo sistema e depois com uma multiplicação de matrizes, obter a solução do sistema primitivo ao qual correspondia a matriz de dados $\vec{b}$. Se obteve, assim, a solução no referencial *primitivo. Só vale a pena fazer isto se o novo sistema for mais fácil de resolver, em outras palavras se a matriz T' for mais simples. Mas se pode demonstrar que é sempre possível se obter uma expressão mais simples para T.*

Usamos a hipótese:"T é uma matriz quadrada". Esta hipótese sempre pode se verificar completando T com linhas ou colunas nulas.

4. (ex. 1, página 151)

Solução 16 *Para escalonar um sistema, vamos executar apenas operações elementares-linha, portanto vamos multiplicar, à esquerda, por matrizes que induzem combinação linear de linhas. Vamos escrever o sistema espandido $I|T\vec{x} = \vec{b}$ justapondo a matriz identidade ao lado da matriz T. Todas as operações elementares feitas com T serão também efetuadas com a matriz justaposta, (que já não mais será matriz identidade), na linha abaixo temos $\mathcal{A}|T\vec{x} = \vec{b}$ em que a matriz $\mathcal{A}$ já está memorizando as* operações *"multiplicar a segunda linha por -2, a primeira linha por 1 e escrever a combinação linear das mesmas no lugar da segunda linha":*

$$I\ ;\ T\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \mathcal{A}\ ;\ T'x = b'$$

Isto transforma a matriz T na matriz triangular superior T' e o sistema já está escalonado e podemos resolvê-lo facilmente:

$$T'\vec{x} = \vec{b'} \iff \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\ ;\ x_1 = \frac{5}{6}.$$

Observe que quando se fazem apenas operações elementares-linha, a matriz das incognitas não muda o que equivale a dizer que não foi feita nenhuma mudança de coordenadas*, e se tem assim, diretamente, a solução no referencial original.*

5. (ex. 2, página 151)

Solução 17

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Donde se conclue sucessivamente que x_3 é qualquer, vamos chamar $x_3 = t \in \mathbf{R}$, $5x_2 - 5t = 5 \Rightarrow x_2 = 1 + t, x_1 = -2t$. Temos assim as equações paramétricas de uma reta que é a solução do sistema de equações lineares proposto.

6. (ex. 3, página 151)

Solução 18 *A matriz $\mathcal{A}$ que escalona este sistema é* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *quer dizer que se T for a matriz do sistema, então $T' = \mathcal{A}T$. nesta ordem, é a matriz* triangular superior *procurada, e $\vec{b}' = \mathcal{A}\vec{b}$ o novo* vetor de dados*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então o novo sistema é: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Vemos que $x_3 = t \in \mathbf{R}$, é qualquer. $x_2 = x_3 = t, x_1 = -2t$. Estas são as equações de uma reta paralela à reta encontrada na solução anterior, mas agora esta passa na origem, quer dizer que encontramos a solução de $T\vec{x} = 0 \iff Ker(T)$, um espaço vetorial de dimensão 1. A solução, no caso anterior, é uma translação desta reta que corresponde ao seguinte teorema:

Teorema ***39*** *Solução de sistemas lineares. A solução geral de uma sistema linear $T\vec{x} = \vec{b}$ é uma translação da solução do sistema homogêneo $T\vec{x} = \vec{0}$ que passa numa solução particular $T\vec{x_0} = \vec{b}$.*

Donde se conclue sucessivamente que x_3 é qualquer, vamos chamar $x_3 = t$, $5x_2 - 5t = 0 \Rightarrow x_2 = t, x_1 = -2t$. Temos assim as equações paramétricas *de uma reta,* que passa na origem*, que é a solução do sistemas de equações lineares proposto. A reta solução neste caso é paralela à reta-solução do caso anterior, mas passando na origem* porque *é a solução de uma* equação homogênea. *Resolvemos uma equação do tipo* $T\vec{x} = \vec{0}$, *e encontramos* $Ker(T)$.

Para encontrar a solução geral de um sistema linear, basta encontrar a solução geral do sistema homogêneo, e uma solução particular do não homogêneo.

7. (ex. 4, página 151)

Solução 19 *Já vimos da solução anterior que a matriz* $\mathcal{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *memoriza as informações para escalonar a matriz do sistema, logo, se* T *for a matriz do sistema, então* $T' = \mathcal{A}T$, *nesta ordem, é uma* matriz triangular superior, *e* $\vec{b'} = \mathcal{A}\vec{b}$ *é a nova matriz de dados. O novo sistema é:* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. *O sistema se verifica então* **impossível** *porque a última linha do vetor de dados sendo diferente de zero, não pode ser a combinação linear de coeficientes nulos.*

8. (ex. 5, página 151)

Solução 20 *A primeira matriz à esquerda já é o resultado da aplicação de combinação linear de linhas na matriz identidade para anular o primeiro elemento da segunda linham e o primeiro elemento da terceira linha da matriz do sistema:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

observe que a alteração se deu também na matriz de dados. Se chamarmos $\mathcal{A}$ *a matriz que efetua as transformações, executamos:* $\mathcal{A}T\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b}$ *em que* $\vec{x}, \vec{b}$ *são, respectivamente, as matrizes das incognitas e de dados. Combinando linearmente agora as linhas 2 e 3 com coeficientes* $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ *e colocando o resultado na terceira linha, temos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{17}{15} \end{bmatrix},$$

Donde se conclue sucessivamente que $x_3 = \frac{-17}{15}, x_2 = \frac{14}{3}, x_1 = \frac{136}{15}$.

9. (ex. 6, página 151)

Solução 21 *Para se obter uma matriz triangular superior, temos que sucessivamente ir anulando todos os elementos que se encontrem abaixo da diagonal principal, e vimos na questão anterior que isto se faz multiplicando* à esquerda *por uma matriz que foi obtida transformando a matriz identidade com as operações-linha desejadas*[1]*. Para obter uma matriz diagonal temos que efetuar operações-coluna o equivale a multiplicar* à direita *por matrizes que induzam operações-coluna. Se a matriz for simétrica, a cada operação-linha que anule um elemento abaixo da diagonal, idêntica operação-coluna irá anular um elemento simétrico em relação à diagonal. Se a matriz que induziu a operação linha foi $\mathcal{A}$, então a matriz transposta $\mathcal{A}^t$ irá induzir a operação-coluna semelhante. Assim, depois de um número finito n de operações-coluna-linha:*

$$\mathcal{A}_n \ldots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 T \mathcal{A}_1^t \mathcal{A}_2^t \ldots \mathcal{A}_n^t = D$$

temos T transformada na matriz diagonal D. A matriz $\mathcal{A}$ procurada, é o produto $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n \ldots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1$, porque $\mathcal{A}_1^t \mathcal{A}_2^t \ldots \mathcal{A}_n^t = \mathcal{A}^t$.

10. (ex. 8, página 152)

Solução 22 *Escalonando a matriz temos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que foi feita aplicando a matriz inversível

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

*à matriz do sistema e ao vetor de dados. Como o posto da matriz escalonada é underline*2 *então a liberdade é underline*1 *e portanto a solução é uma translação do núcleo, uma reta, passando por valor particular da solução.*

Determinação de um valor particular da solução:

$$3x_2 + 6x_3 = 2 \tag{7.58}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \equiv 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \tag{7.59}$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_2 + 6x_3 = 2x_1 + x_2 + 2 = 2 \tag{7.60}$$

$$x_2 = -2x_1 \tag{7.61}$$

[1]na "prática" ninguém faz produtos de matrizes, diretamente se opera com as linhas, mas na teoria precisamos expressar estas operações como produtos de matrizes.

$$6x_3 = 2 - 3x_2 \Longrightarrow 6x_3 = 2 + 6x_1 \tag{7.62}$$
$$x_3 = \frac{1+3x_1}{3} \tag{7.63}$$
$$(x_1, -2x_1, \frac{1+3x_1}{3}) \tag{7.64}$$
$$\textit{uma solução particular } (1, -2, \frac{4}{3}) \tag{7.65}$$

Testando $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *na equação paramétrica encontrada resulta em* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \quad) = \\ \frac{1+3x_1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

11. (ex. 9, página 152)

Solução 23 *Com* `scilab`

```
-->A = [2,6,1,2;0, 3, 1, 4;0, 3, 1, 2]
 A  =

!   2.    6.    1.    2. !
!   0.    3.    1.    4. !
!   0.    3.    1.    2. !

-->rank(A) = posto(A)
 ans  =

    3.
```

O sistema tem liberdade=1.$Ker(A)$ *tem dimensão 1, é uma reta. Resolvendo o sistema a partir da última equação, encontramos, usando a primeira forma escalonada da matriz,*

$$-2x_4 = 4 \quad \Rightarrow \quad \Leftarrow \quad x_4 = -2 \tag{7.66}$$
$$3x_2 + x_3 + 4x_4 = 3x_2 + x_3 = 9 \tag{7.67}$$
$$x_2 = \frac{9-x_3}{3} = 3 - \frac{x_3}{3} \tag{7.68}$$
$$2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 2x_1 + 9 - x_3 + 9 - 4 = 5 \tag{7.69}$$
$$x_1 = -\frac{9+x_3}{2} \tag{7.70}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \; ; \; t \in \mathbf{R} \tag{7.71}$$

em que estamos usando $x_3 = t \in \mathbf{R}$ *para a variável livre. Usando a segunda expressão do escalonamento, temos*

$$x_4 = -2 \tag{7.72}$$

$$\tag{7.73}$$

$$x_2 + \frac{x_3}{3} = 3 \quad \Rightarrow \quad \Leftarrow \quad x_2 = 3 - \frac{x_3}{3} \tag{7.74}$$

$$x_1 - \frac{x_3}{2} = -\frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \Leftarrow \quad x_1 = -\frac{9}{2} + \frac{x_3}{2} \tag{7.75}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \ ; \ t \in \mathbf{R} \tag{7.76}$$

---

1. Verifique por cálculo direto qual das matrizes seguintes

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

tem inversa, (é `não singular`).

Solução 24 • *Queremos encontrar uma matriz* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *que multiplicada, (à direita e à esquerda) por* $\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ *resulte na identidade:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando as contas indicadas à esquerda temos:

$$\begin{bmatrix} acos(\theta) + bsen(\theta) & -asen(\theta) + bcos(\theta) \\ ccos(\theta) + dsen(\theta) & -csen(\theta) + dcos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estabelecendo as igualdades entre os termos das matrizes anteriores[2] *temos:*

$$\begin{bmatrix} acos(\theta) + bsen(\theta) = 1 & -asen(\theta) + bcos(\theta) = 0 \\ ccos(\theta) + dsen(\theta) = 0 & -csen(\theta) + dcos(\theta) = 1 \end{bmatrix}$$

Como $0, 1$ *são, respectivamente, cos e sen do ângulo zero, vemos:*

$$\begin{bmatrix} acos(\theta) + bsen(\theta) = cos(0) & -asen(\theta) + bcos(\theta) = sen(0) \\ ccos(\theta) + dsen(\theta) = sen(0) & -csen(\theta) + dcos(\theta) = cos(0) \end{bmatrix}$$

que sugere pensarmos em "ângulo soma" com

$$a = cos(\alpha) \ ; \ b = sen(\alpha)$$

[2] que na prática significa escrever uma expressão matricial sob forma de sistema de equações

e dai sai que $0 = \alpha + \theta \;\Rightarrow\; \alpha = -\theta$. *A matriz inversa de uma matriz da forma*

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

sempre existe e é da forma

$$\begin{bmatrix} cos(-\theta) & -sen(-\theta) \\ sen(-\theta) & cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Estas matrizes se chamam `matrizes de rotação`*, porque se aplicadas a uma vetor* $\vec{B}$ *produzem neste vetor uma rotação de ângulo* θ.

- *Queremos encontrar uma matriz* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando e realizando a igualdade termo a termo temos:

$$\begin{cases} a = 1 & 2a - b = 0 \\ c = 0 & 2c - d = 1 \end{cases}$$

Substituindo a por 1 e c por 0 encontramos que $b = 2, d = -1$

- *Como no caso anterior, queremos encontrar uma matriz* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *que multiplicada por* $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ *resulte na identidade:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando: $\begin{bmatrix} a - 2b = 1 & -a + 2b = 0 \\ c - 2d = 0 & -c + 2d = 1 \end{bmatrix}$.

Este esquema representa 4 equações nas incognitas a, b, c, d. *Se somarmos as duas primeiras equações* $a - 2b = 1$; $-a + 2b = 0$ *resulta na identidade impossível* $0 = 1$ *que significa "*não ser possível encontrar a, b que satisfaça estas duas equações*", ou seja, a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ *não tem inversa, é uma matriz singular.*

2. Considere o sistema $\mathcal{T}x = b$. Prove algebricamente que, se $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ for uma solução do sistema e se $\mathcal{A}$ for `não singular` então o $\vec{v}$ é solução do sistema

$$\mathcal{A}\mathcal{T}x = \mathcal{A}b.$$

Prove também a recíproca desta afirmação.

Solução 25 ($\Rightarrow$) *dizer que $\vec{v}$ é uma solução de $\mathcal{T}x = b$ isto quer dizer que a identidade $\mathcal{T}v = b$ verifica. Multiquemos a identidade, à esquerda, por $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{A}\mathcal{T}v = \mathcal{A}b \iff \mathcal{A}\mathcal{T}v = \mathcal{A}b$$

mostrando que $\vec{v}$ é solução do sistema modificado. ($\Leftarrow$) *Reciprocamente, se $\vec{v}$ for solução de $\mathcal{A}\mathcal{T}x = \mathcal{A}b$ então a identidade $\mathcal{A}\mathcal{T}v = \mathcal{A}b$ se verifica, e multiplicando-a por $\mathcal{A}^{-1}$ à esquerda, temos*

$$\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}^{v} = \mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}b \iff \mathcal{T}v = b$$

como queriamos.

Observação 18 *Invariância das soluções.*

Mostramos, com esta invariância que a operação de inversão passo a passo, construida abaixo, produz uma matriz $\mathcal{M}$ que transforma um sistema de equações sem que as soluções se percam.

Veremos em outra lista de exercícios que, o algoritmo de inversão passo a passo pode não servir para encontrar a inversa de uma matriz porque a matriz do sistema pode não ser singular, mas que ele pode nos conduzir a uma matriz mais simples e portanto a um sistema mais fácil de resolver, é o chamado `método de Gauss` .

3. Prove que as equações lineares $\mathcal{T}x = b$ e $\mathcal{A}\mathcal{T}x = \mathcal{A}b$ são equivalentes se a matriz $\mathcal{A}$ for não singular.

   Solução 26 *É o conteúdo do exercício anterior, leia a observação 18.*

4. <u>inversão passo a passo de uma matriz</u>

   Solução 27 *se você fizer as contas corretamente, aparecerá o resultado anunciado. Vamos desenvolver a solução do item abaixo que não tem um algoritmo indicado. Descubra uma matriz diagonal$\mathcal{M}_3$ que multiplicada pela última matriz, resulte na identidade, (a inversa de $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$)*

   Caso mais geral <u>inversa da matriz diagonal:</u> Se uma matriz for diagonal, tiver elementos diferentes de zero apenas sobre a diagonal principal[3], *se tiver inversa, a matriz inversa terá no lugar dos correspondentes elementos da diagonal principal os inversos multiplicativos:*

$$\mathcal{A} = [\lambda_i \delta_{ij}] \Rightarrow \mathcal{A}^{-1} = [\lambda_i^{-1}\delta_{ij}] \Leftarrow \lambda_i \neq 0$$

   A notação δ_{ij} se lê `delta de Kronecker` *e vale* 0 *se* $i \neq j$ *ou* 1 *se* $i = j$. *Então a matriz que procuramos é* $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/1.5 \end{bmatrix}$.

[3] observe que os elementos da diagonal principal também podem ser zero...

5. Calcule a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ usando o método descrito na questão anterior.

Solução 28 *Chame* $\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, *esta matriz foi obtida "multiplicando-se por 5 primeira linha da matriz identidade e por -3 a segunda linha da matriz identidade, somando estas duas linhas assim modificadas colocando-se o resultado na segunda linha" é a memorização destas operações na matriz identidade e* $\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *que foi obtida "multiplicando-se por 5 a primeira linha, por 2 a segunda linha, somando as linhas assim modificadas e colocando o resultado na primeira linha". O produto $\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{A}$ é a matriz diagonal* $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. *Primeira consequência dos cálculos, fica claro que a matriz $\mathcal{A}$ é inversível. Por exercício anterior, a inversa desta última matriz é* $\mathcal{M}_3 = \begin{bmatrix} 1/15 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$. *Quer dizer que se fizermos o produto: $\mathcal{M}_3\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{A}$ o resultado será a matriz identidade. Observe que a ordem de multiplicação é importante, o* produto de matrizes não é comutativo, verifique invertendo os termos na[4] multiplicação. *Entretanto, a matriz*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_3\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1 = \mathcal{A}^{-1}$$

e agora vale:

$$\mathcal{M}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{M} = \mathcal{I}.$$

6. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ não tem inversa, devido uma impossibilidade de aplicar o méto de *inversão passo a passo.*

Solução 29 *Não será possível encontrar a matriz $\mathcal{M}_2$ porque a segunda linha da matriz resultante do primeiro passo é nula.*

7. Solução de um sistema de equações.

   (a) Considere a *equação linear* $\mathcal{T}\vec{X} = B \equiv \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. Encontre uma matriz $\mathcal{M}$, não singular, tal que a nova *equação linear* $\mathcal{M}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{M}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ seja algebricamente idêntica à anterior, e a nova matriz seja diagonal.

   Solução 30 *Considere as matrizes $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1$, nesta ordem:*

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \ ; \ \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[4] todas estas contas podem ser facilmente executadas num programa de cálculo numérico como [17]

Observe que o método é ligeiramente diferente do que apresentamos anteriormente, agora simplesmente tomamos o primeiro elemento de cada linha para multiplicar pela outra linha, no caso de $\mathcal{M}_1$ e no caso de $\mathcal{M}_2$ usamos o segundo elemento de cada linha para multiplicar pela outra. As matrizes podem assim ficar com números inteiros muito grandes o que pode ser um problema em programas de computador uma vez que as linguagens de programação, em geral, tem limites para o tamanho dos números inteiros[5]. *O produto $\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{A}$ é a matriz* $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ *cuja inversa é* $\mathcal{M}_3 = \begin{bmatrix} 1/15 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$. *A matriz que procuramos será o produto*

$$\mathcal{M}_3\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Observe que a solicitação do texto do exercício exigia apenas que a nova matriz fosse diagonal, que dizer que a matriz $\mathcal{M}_3$ se encontra em excesso na solução.

(b) Resolva a nova *equação linear*, e verifique, testando a solução na anterior, que ela é solução da *equação linear* antiga.

Solução 31 *A nova equação linear é:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 4.8 \end{pmatrix}$$

e a solução é visível: $x = 2.6\ ; y = 4.8$. *Se efetuarmos a operação* $\mathcal{T}\begin{pmatrix} 2.6 \\ 4.8 \end{pmatrix}$ *o resultado será* $\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ *mostrando que se verifica uma identidade quando substituirmos x, y na* equação linear *pelos valores achados na equação modificada.*

7.7 Mudança de base - solução.

1. Considere o sistema $T\vec{x} = \vec{b}$. Mostre que se a matriz $\mathcal{A}$ for não singular[6] então o sistema pode ser escrito como $T'\vec{x'} = \vec{b'}$ em que T é uma matriz equivalente a T, x' em um novo sistema de coordenadas, e $\vec{b'}$ é uma nova versão da matriz de dados compatível com a matriz de dados inicial de modo que ao resolver o sistema $T'\vec{x'} = \vec{b'}$ se pode retornar ao sistema primitivo de coordenadas com a operação: $x = \mathcal{A}^{-1}x'$.

   Solução 32 *Se $\mathcal{A}$ for uma matriz* não singular*, então sua inversa, $\mathcal{A}^{-1}$ existe e podemos efetuar as seguintes operações equivalentes, se a matriz*

[5] elas também tem limites para números fracionários, mas estes são em geral bem mais confortáveis ...

[6] se chama "*matriz singular*" àquelas que não tem inversa, e "*não singulares*" àquelas que têm inversa.

T for quadrada:

$$T\vec{x} = \vec{b} \equiv \mathcal{A}T\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \mathcal{A}T\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv$$

$$\equiv T'\vec{x'} = \vec{b'}$$

Como todas as operações feitas acima são inversíveis, (porque podemos efetuar as operações inversas), então os dois sistemas são equivalentes, quer dizer, se resolvermos $T'\vec{x'} = \vec{b'}$ *então* $x' = \mathcal{A}x \equiv x = \mathcal{A}^{-1}x'$ *podemos obter o valor de* x *com uma simples multiplicação de matrizes. Isto equivale na prática a ter trocado as variáveis, (coordenadas), resolvido um novo sistema e depois com uma multiplicação de matrizes, obter a solução do sistema primitivo ao qual correspondia a matriz de dados* $\vec{b}$. *Se obteve, assim, a solução no* referencial *primitivo. Só vale a pena fazer isto se o novo sistema for mais fácil de resolver, em outras palavras se a matriz* T' *for mais simples. Mas se pode demonstrar que é sempre possível se obter uma expressão mais simples para* T.

Usamos a hipótese:"T *é uma matriz quadrada". Esta hipótese sempre pode se verificar completando* T *com linhas ou colunas nulas.*

2. Considere a matriz $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Multiplique UT e TU^t, com $T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ para verificar que a primeira multicação induz uma troca de linhas, (qual ?) e a segunda induz uma troca de colunas, (qual ?). Verifique depois a estrutura de U e de U^t para compreender como construir matrizes que induzem operações *linha* ou *coluna*.

Solução 33 $UT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$ *se produzindo uma permutação das linhas do mesmo tipo que se observa em* U *relativamente a matriz* identidade. *Logo*

<u>**regra:**</u> *"se permutando as linhas da matriz identidade e se a multiplicando pela esquerda por uma matriz* T *se induz em* T *a mesma permutação de linhas."* $TU^t = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{bmatrix}$

<u>**regra:**</u> *"se permutando as colunas da matriz identidade e se a multiplicando pela direita por uma matriz* T *se induz em* T *a mesma permutação de colunas."*

3. Escalone o sistema $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, memorize as operações na matriz identidade, e determine a matriz $\mathcal{A}$ que transforma o sistema primitivo no sistema com matriz escalonada.

Solução 34 *Para escalonar um sistema, vamos executar apenas operações elementares-linha, portanto vamos multiplicar, à esquerda, por matrizes que induzem combinação linear de linhas. Vamos escrever o sistema espandido $I|T\vec{x} = \vec{b}$ justapondo a matriz identidade ao lado da matriz T. Todas as operações elementares feitas com T serão também efetuadas com a matriz justaposta, (que já não mais será matriz identidade), na linha abaixo temos $\mathcal{A}|T\vec{x} = \vec{b}$ em que a matriz $\mathcal{A}$ já está memorizando as* operações *"multiplicar a segunda linha por -2, a primeira linha por 1 e escrever a combinação linear das mesmas no lugar da segunda linha":*

$$I\ ;\ T\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\ ;\ \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \mathcal{A}\ ;\ T'x = b'$$

Isto transforma a matriz T na matriz triangular superior T' e o sistema já está escalonado e podemos resolvê-lo facilmente:

$$T'\vec{x} = \vec{b'} \iff \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\ ;\ x_1 = \frac{5}{6}.$$

Observe que quando se fazem apenas operações elementares-linha, a matriz das incognitas não muda o que equivale a dizer que não foi feita nenhuma mudança de coordenadas*, e se tem assim, diretamente, a solução no referencial original.*

4. Escalone a matriz do sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e discuta se ele tem solução.

Solução 35

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Donde se conclue sucessivamente que x_3 é qualquer, vamos chamar $x_3 = t \in \mathbf{R}$, $5x_2 - 5t = 5 \ \Rightarrow\ x_2 = 1 + t, x_1 = -2t$. Temos assim as equações paramétricas de uma reta que é a solução do sistema de equações lineares proposto.

5. Escalone a matriz do sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e discuta se o sistema solução e compare com a solução do sistema anterior.

Solução 36 *A matriz $\mathcal{A}$ que escalona este sistema é* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *quer dizer que se T for a matriz do sistema, então $T' = \mathcal{A}T$. nesta ordem, é a matriz* triangular superior *procurada, e $\vec{b}' = \mathcal{A}\vec{b}$ o novo* vetor de dados*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então o novo sistema é: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vemos que $x_3 = t \in \mathbf{R}$, é qualquer. $x_2 = x_3 = t, x_1 = -2t$. Estas são as equações de uma reta paralela à reta encontrada na solução anterior, mas agora esta passa na origem, quer dizer que encontramos a solução de $T\vec{x} = 0 \iff Ker(T)$, um espaço vetorial de dimensão 1. A solução, no caso anterior, é uma translação desta reta que corresponde ao seguinte teorema:

Teorema ***40*** *Solução de sistemas lineares. A solução geral de uma sistema linear $T\vec{x} = \vec{b}$ é uma translação da solução do sistema homogêneo $T\vec{x} = \vec{0}$ que passa numa solução particular $T\vec{x_0} = \vec{b}$.*

Para encontrar a solução geral de um sistema linear, basta encontrar a solução geral do sistema homogêneo, e uma solução particular do não homogêneo.

6. Discuta o sistema linear $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Solução 37 *Já vimos da solução anterior que a matriz $\mathcal{A}$* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *memoriza as informações para escalonar a matriz do sistema, logo, se T for a matriz do sistema, então $T' = \mathcal{A}T$, nesta ordem, é uma* matriz triangular superior*, e $\vec{b'} = \mathcal{A}\vec{b}$ é a nova matriz de dados. O novo sistema é:* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. *O sistema se verifica então* **impossível** *porque a última linha do vetor de dados sendo diferente de zero, não pode ser a combinação linear de coeficientes nulos.*

7. Escalone o sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e memorize na matriz identidade as operações feitas de modo a ter ao final a matriz $\mathcal{A}$ que efetua o conjunto das operações feitas. Discuta o sistema.

   Solução 38 *A primeira matriz à esquerda já é o resultado da aplicação de combinação linear de linhas na matriz identidade para anular o primeiro elemento da segunda linham e o primeiro elemento da terceira linha da matriz do sistema:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

   observe que a alteração se deu também na matriz de dados. Se chamarmos $\mathcal{A}$ a matriz que efetua as transformações, executamos: $\mathcal{A}T\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b}$ em que $\vec{x}, \vec{b}$ são, respectivamente, as matrizes das incognitas e de dados. Combinando linearmente agora as linhas 2 e 3 com coeficientes $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ e colocando o resultado na terceira linha, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{17}{15} \end{bmatrix},$$

   Donde se conclue sucessivamente que $x_3 = \frac{-17}{15}, x_2 = \frac{14}{3}, x_1 = \frac{136}{15}$.

8. Mostre que, se T for uma matriz simétrica, existe um matriz $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}T\mathcal{A}^{-1}$ é uma matriz diagonal .

   Solução 39 *Para se obter uma matriz triangular superior, temos que sucessivamente ir anulando todos os elementos que se encontrem abaixo da diagonal principal, e vimos na questão anterior que isto se faz multiplicando* à esquerda *por uma matriz que foi obtida transformando a matriz identidade com as operações-linha desejadas*[7]*. Para obter uma matriz diagonal temos que efetuar operações-coluna o equivale a multiplicar* à direita *por matrizes que induzam operações-coluna. Se a matriz for simétrica, a cada operação-linha que anule um elemento abaixo da diagonal, idêntica operação-coluna irá anular um elemento simétrico em relação à diagonal. Se a matriz que induziu a operação linha foi $\mathcal{A}$, então a matriz transposta $\mathcal{A}^t$ irá induzir a operação-coluna semelhante. Assim, depois de um número finito n de operações-coluna-linha:*

$$\mathcal{A}_n \dots \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1 T \mathcal{A}_1^t \mathcal{A}_2^t \dots \mathcal{A}_n^t = D$$

   temos T transformada na matriz diagonal D. A matriz $\mathcal{A}$ procurada, é o produto $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n \dots \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$, porque $\mathcal{A}_1^t\mathcal{A}_2^t \dots \mathcal{A}_n^t = \mathcal{A}^t$.

[7]na "prática" ninguém faz produtos de matrizes, diretamente se opera com as linhas, mas na teoria precisamos expressar estas operações como produtos de matrizes.

7.8 Operações elementares linha-coluna - solução

1. (a) Mostre que as *operações elementares* com matrizes são operadores lineares, identifique o espaço vetorial em que eles atuam.

   Solução 40

   (b) Mosre que as *operações elementares* são inversíveis.

   (c) Mostre as *operações elementares-linha* podem ser representadas por operações do mesmo tipo efetuadas sobre a matriz identidade, no sentido de que, "a matriz identidade, tranformada por uma *operação elementar-linha*, ao ser multiplicada à esquerda por T, induz em T, a mesma *operação elementar linha* efetuada na matriz identidade", simbolicamente: $\mathcal{O}(I)T = \mathcal{O}(T)$, em que $\mathcal{O}$ representa uma *operação elementar-linha*.

   (d) Mostre que

   (e) Mostre as *operações elementares-coluna* podem ser representadas por operações do mesmo tipo efetuadas sobre a matriz identidade, no sentido de que, "a matriz identidade, tranformada por uma *operação elementar-coluna*, ao ser multiplicada à direita por T, induz em T, a mesma *operação elementar-coluna* efetuada na matriz identidade", simbolicamente: $T\mathcal{O}(I) = \mathcal{O}(T)$, em que $\mathcal{O}$ representa uma *operação elementar-coluna*.

2. Considere o sistema de equações $T\vec{x} = \vec{b}$ expandido pela matriz identidade I à esquerda:$I|T\vec{x} = \vec{b}$. Mostre que ao escalonar o sstema $T\vec{x} = \vec{b}$, aplicando-se a I as mesma operações elementares linha, se terá *memorizado* em I todas as operações linha, no sentido de que a matriz $\mathcal{O}(I)$ assim resultante, se aplicada em T produz a matriz do sistema escalonado.

3. Use um raciocínio heurístico para concluir que $\mathcal{A}\mathcal{T}\mathcal{A}^{-1}$ é uma matriz diagonal se, e somente se, T for uma matriz simétrica.

7.9 Matriz diagonal e vetor próprio - Solução.

1. Considere a matriz T cujas entradas são todas nulas exceto as da diagonal principal que são todas iguais ao número real λ. Verifique que $Tx = \lambda x$. Ou seja T expande o espaço inteiro, por igual, com o fator de expansão uniforme λ. *Expande* ou *contrai*, se $\lambda > 1$ ou $\lambda < 1$.

2. Na matriz S todas as entradas são nulas exceto as da diagonal principal onde se encontram os números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. A matriz T do exercício anterior corresponde ao caso particular em que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Uma matriz deste tipo se chama `matriz diagonal`.

   (a) Suponha que $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ sejam os distintos componentes de um `sistema econômico`, todos indispensáveis e independentes. A economia de um setor $\vec{v}$ deste sistema, (*um munícipio, por exemplo, dentro de um pais*), caracteriza sua presença no `sistema` com os pesos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ com que participam na produção: $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 +$

$\ldots + x_n\vec{e}_n$. Se o munícipio não produz o item $\vec{e}_i$ então $x_i = 0$. A matriz T memoriza a evolução do sistema em dois momentos. Suponha que o município $\vec{v}$ duplicou sua presença na economia com os produtos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_7\}$, não teve presença relativamente aos produtos $\{\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_6, \vec{e}_8, \vec{e}_9, \vec{e}_{10}\}$, e sua produção de $\vec{e}_5$ se reduziu a, metade, relativamente ao período anterior observado. Suponha que o número de itens da economia é 10, (sua dimensão). Determine a matriz T que memoriza a transição de um estado da economia $\vec{v}$ para o seguinte $T\vec{v}$.

(b) Considere a mesma terminologia anterior, mas agora consideremos que a matriz T com elementos diagonais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ representa as taxas de juros aplicadas aos empréstimos de financiamentos na produção dos distintos componentes. Qual o significado econômico para o munícipio se o banco central estabelecer as taxas de juros $\{\lambda_1 = 10\% a.m. = \ldots = \lambda_7 = 10\%, \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 1\% a.m.\}$, não esquecendo que o munícipio $\vec{v}$ comparece na economia apenas com o intens $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_7$.

(c) Suponha que uma taxa de juros razoável seja de $5\% a.a.$ e que o planejamento econômico deseje estimular a produção dos itens $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5\}$, desestimular a produção dos itens $\{\vec{e}_6, \vec{e}_8, \vec{e}_{10}\}$ e manter estáveis os restantes. Como poderia ser a matriz T?

Definição 31 *Valor próprio, vetor próprio.*
Se para uma transformação houver algum vetor $\vec{x}$ tal que $T\vec{x} = \lambda\vec{x}$, dizemos que λ é`valor próprio de` *T e que $\vec{x}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio λ.*

3. Identifique `vetores próprios` e `valores próprios`, dizendo quem é de quem, nas questões acima.

4. Verifique que a matriz de rotação real

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{7.77}$$

não pode ter valores próprios, nem vetores próprios, a não ser para exatamente para dois valores de θ, quais?

5. base de vetores próprios.

(a) Encontre os `valores próprios` e depois um par de `vetores próprios` $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ correspondendo aos `valores próprios` encontrados, para matriz $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$[8]. Verifique que os vetores próprios são `l.i.`[9]. Um par de vetores próprios forma assim uma base para o espaço.

[8]Observe que o vetore próprio associado a um valor próprio não é único, guarde esta informação para uso posterior.

[9]sempre que os valores próprios forem diferentes, os vetores próprios associados serão `l.i.`. Mas para um único valor próprio pode também haver associados vetores próprios `l.i.`.

Solução 41 *Por definição procuramos λ tal que $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ e podemos observar que depois da igualdade temos: $\lambda\mathcal{I}\vec{x}$. Isto nos permite calcular:*

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\mathcal{I}\vec{x} \equiv (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\vec{x} = 0$$

e como não tem sentido considerar vetor próprio nulo, *estamos procurando uma solução não trivial para esta equação homogênea o que nos leva a conclusão que o determinante do sistema tem que ser nulo:*

$$P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$$

$P(\lambda)$ é um polinômio de grau n em λ sendo $\mathcal{A}$ uma matriz n x n. Este polinômio recebe o nome de `polinômio caracterísitico`[10] *No presente caso temos:*

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\ ;\ \lambda = 3$$

Voltando a re-escrever a equação para cada um dos valores encontrados para λ podemos encontrar vetores próprios $\vec{v}_{\lambda=2}$ e $\vec{v}_{\lambda=3}$: No primeiro caso encontramos, se considerarmos $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $x_1 = 2x_2$. Quer dizer que qualquer vetor desta reta é um vetor próprio associado a $\lambda = 2$, por exemplo $\vec{v}_1 = (2,1)$. De forma análoga, com $\lambda = 3$ encontraremos que $x_1 = x_2$, logo $\vec{v}_2 = (1,1)$ é um exemplo. Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ são l.i. e formam assim uma base para $\mathbf{R}^2$. A matriz da transformação linear na nova base será $\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\vec{v}_1) \\ A(\vec{v}_2) \end{bmatrix}$ porque já vimos que matriz de uma transformação linear é formada pelos vetores-coluna obtidos ao se aplicar a transformação linear nos vetores da base, e aqui $\mathcal{A}\vec{v}_1 = 2\vec{v}_1$ $\mathcal{A}\vec{v}_2 = 3\vec{v}_2$.

Geometricamente isto significa que a transformação linear representada por $\mathcal{A}$ deforma o espaço com duas escalas diferentes, uma com valor $\lambda = 2$ na direção do vetor $\vec{v}_1 = (2,1)$ e com valor $\lambda = 3$ na direção do vetor $\vec{v}_2 = (1,1)$. O estudo dos valores próprios-vetores próprios nos leva a encontrar os sub-espaços ao longo dos quais as deformações são constantes. Neste caso a deformação se dá com coeficiente 2 ao longo da reta $x_2 = 2x1$ e com coeficiente 3 ao longo da reta $x_2 = x_1$.

Podemos ver os valores próprios *na diagonal da nova matriz. A teoria geral diz que quando encontrarmos* todos *os valores próprios próprios de uma* operador linear, *se eles forem todos diferentes, a matriz, numa base formada de vetores próprios será uma matriz diagonal com os valores próprios na diagonal.*

(b) A matriz $\mathcal{A}$ do exercício anterior só existe porque uma base foi escolhida para representar os vetores no espaço. Suponha que a base escolhida tenha sido $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{v}_2 = (0,1)$.

[10] as denominações *vetor característico, valor característico* são usadas também.

Definição 32 *Matriz de mudança de base. Uma matriz $\mathcal{T}$ se diz de* `mudança de base` *se ela transforma $\mathcal{T}\vec{e}_i$ em $\vec{v}_i$ em que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ são duas bases diferentes do espaço.*

Encontre a matriz de mudança de base, da base primitiva para a base de vetores próprios, relativamente ao problema anterior.

(c)

6. (a) Mostre que as *operações elementares* com matrizes são operadores lineares, identifique o espaço vetorial em que eles atuam.

   Solução 42

   (b) Mosre que as *operações elementares* são inversíveis.

   (c) Mostre as *operações elementares-linha* podem ser representadas por operações do mesmo tipo efetuadas sobre a matriz identidade, no <u>sentido</u> de que, "a matriz identidade, tranformada por uma *operação elementar-linha*, ao ser multiplicada à esquerda por T, induz em T, a mesma *operação elementar linha* efetuada na matriz identidade", simbolicamente: $\mathcal{O}(I)T = \mathcal{O}(T)$, em que $\mathcal{O}$ representa uma *operação elementar-linha.*

   (d) Mostre que

   (e) Mostre as *operações elementares-coluna* podem ser representadas por operações do mesmo tipo efetuadas sobre a matriz identidade, no <u>sentido</u> de que, "a matriz identidade, tranformada por uma *operação elementar-coluna*, ao ser multiplicada à <u>direita</u> por T, induz em T, a mesma *operação elementar-coluna* efetuada na matriz identidade", simbolicamente: $T\mathcal{O}(I) = \mathcal{O}(T)$, em que $\mathcal{O}$ representa uma *operação elementar-coluna.*

7. Considere o sistema de equações $T\vec{x} = \vec{b}$ expandido pela matriz identidade I à esquerda:$I|T\vec{x} = \vec{b}$. Mostre que ao escalonar o sstema $T\vec{x} = \vec{b}$, aplicando-se a I as mesma operações elementares linha, se terá *memorizado* em I todas as operações linha, no sentido de que a matriz $\mathcal{O}(I)$ assim resultante, se aplicada em T produz a matriz do sistema escalonado.

8. Use um raciocínio heurístico para concluir que $\mathcal{A}\mathcal{T}\mathcal{A}^{-1}$ é uma matriz diagonal se, e somente se, T for uma matriz simétrica.

1. <u>(ex. 1, página 129)</u>

   (a) **Solução 43**

$$\textit{por hipótese } \mathcal{T}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$$
$$\textit{considerando } \vec{v} = \alpha\vec{u}$$
$$\mathcal{T}(\vec{v}) = \mathcal{T}(\alpha\vec{u}) = \alpha\mathcal{T}(\vec{u}) = \alpha(\lambda\vec{u}) = \lambda(\alpha\vec{u}) = \lambda\vec{v}$$
$$\textit{logo } \mathcal{T}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

Observe que as contas valem inclusive para $\alpha = 0$ e obviamente o vetor zero é um valor singular do conjunto dos autovetores, verifique que ele satisfaz à definição para qualquer autovalor.

(b) **Solução 44**

$$\begin{gathered}
u = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_1 \\
T(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_1) = \alpha_1 T(\vec{u}_1) + \alpha_2 T(\vec{u}_1) = \\
= \alpha_1 \lambda \vec{u}_1 + \alpha_2 \lambda \vec{u}_1 = \lambda(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_1) = \\
\lambda u
\end{gathered}$$

Os cálculos valem, inclusive, para a combinação linear nula.

(c) **Solução 45** *A primeira alternativa é a correta.*
O vetor zero é uma solução de qualquer equação linear homogênea, portanto é solução de

$$\mathcal{T} - \lambda I = 0$$

portanto E_λ é um espaço vetorial chamado autoespaço *associado ao* autovalor λ

---

2. (ex. 2, página 129)

Solução 46 *(a)*

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 8-\lambda & 12 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 8-\lambda & 12 \\ 0 & 24 + (\lambda - 8)(\lambda + 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{gathered}$$

Resolvendo o novo sistema, na variável λ, temos

$$[24 + (\lambda - 8)(\lambda + 2)]x_2 = 0 \equiv 24 + (\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0$$

porque queremos encontrar λ, não importa o valor de x_2.

$$\begin{gathered}
24 + (\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0 \\
\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \\
\lambda \in \{4, 2\}
\end{gathered}$$

autovetor associado a $\lambda = 2$
Consideramos agora a outra equação que podemos deduzir do sistema

$$(8 - \lambda)x_1 + 12x_2 = 0$$

Quando $\lambda = 2$

$$6x_1 + 12x_2 = 0 \ ; \ x_1 = 2 \Longrightarrow (2, -1)$$

Quando $\underline{\lambda = 4}$

$$4x_1 + 12x_2 = 0 \ ; \ x_1 = 3 \Longrightarrow (3, -1)$$

Testando com `scilab`

```
-->T1 = [8,12;-2,-2]
 T1  =

!   8.    12. !
! - 2.  - 2.  !

-->T1*[2;-1]
 ans  =

!   4. !
! - 2. !

-->T1*[3;-1]
 ans  =

!   12. !
! - 4.  !
```

(b) *Escalonando (triangularizando) a matriz do sistema:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 8 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.78}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 8 \\ 5 & -\lambda & 8 \\ 8 & 5 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.79}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 8 \\ 5 & -\lambda & 8 \\ 8 & 5 & -\lambda \end{pmatrix} \equiv \tag{7.80}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 8 \\ 0 & \lambda^2 - 25 & -(8\lambda + 40) \\ 0 & 40 + 5\lambda & 64 - \lambda^2 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.81}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 8 \\ 0 & \lambda^2 - 25 & -(8\lambda + 40) \\ 0 & 0 & (\lambda^2 - 25)(64 - \lambda^2) + (40 + 5\lambda)(8\lambda + 40) \end{pmatrix} \tag{7.82}$$

Resolvendo a equação em λ*, eliminando a solução* $\lambda = 0$ *porque não interessam "autovalores nulos", veja a definição, temos*

$$(\lambda^2 - 25)(64 - \lambda^2) + (40 + 5\lambda)(8\lambda + 40) = 0 \tag{7.83}$$

$$\lambda^4 - 129\lambda^2 - 520\lambda = 0 \tag{7.84}$$
$$\lambda^3 - 129\lambda - 520 = 0 \tag{7.85}$$
$$\tag{7.86}$$

As soluções inteiras desta equação sendo os divisores de 520*, (ver exercícios ao final), então temos*

$$factor\ 520\ \ --> \ 520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13$$

temos que testar se algum destes números é solução da equação, com `scilab` *(até nem precisava), mas este livro é com apoio computacional,*

```
-->function y = f(x)
-->y = x**3 - 129*x - 520
-->endfunction

-->f(2)
 ans  =

  - 770.

-->f(-2)
 ans  =

  - 270.

-->f(3)
 ans  =

  - 880.

-->f(-3)
 ans  =

  - 160.

-->f(5)
 ans  =

  - 1040.

-->f(-5)
 ans  =

    0.
```

vemos que $\lambda = -5$ *é raiz da equação e portanto* $\lambda + 5$ *é fator deste polinômio e podemos dividí-lo por* $\lambda + 5$

1	0	−129	−520	*1*	*5*	
1	5			*1*	*-5*	*-104*
0	−5	−129				
	5	25				
	0	−104	−520			
		104	520			
		0	0			

para encontrar

$$\lambda^2 - 5\lambda - 104$$

cujas raizes são

$$\lambda \in \{-8, 13\}$$

e portanto os autovalores são

$$\lambda \in \{-5, -8, 13\}$$

Podemos agora usar o sistema, com cada um dos autovalores para encontrar <u>*um autovetor associado:*</u>

- <u>$\lambda = -5$</u>

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 8 \\ 5 & -5 & 8 \\ 8 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.87}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 8 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.88}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.89}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.90}$$

$$3x_1 - 3x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_3 \tag{7.91}$$

$$5x_2 + 13x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = -\tfrac{13x_3}{5} \tag{7.92}$$

Observe que a troca de colunas na matriz do sistema impõe a troca da ordem das "variáveis". A permutação de colunas corresponde a uma permutação da base do espaço.
Tomando $x_3 = 5$ *temos o autovetor* $(5, -13, 5)$

- $\underline{\lambda = -8}$

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 8 \\ 8 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.93}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 8 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.94}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.95}$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 \tag{7.96}$$

$$13x_1 + 8x_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = -\tfrac{13x_1}{8} \tag{7.97}$$

tomando $x_1 = 8$ *temos o autovetor* $(8, 8, -13)$

- $\underline{\lambda = 13}$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 5 & -13 & 8 \\ 8 & 5 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.98}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 5 & -13 & 8 \\ 8 & 5 & -13 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.99}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 5 & -13 & 8 \\ 13 & -8 & -5 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.100}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 5 & -13 & 8 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.101}$$

$$\begin{pmatrix} 5(-13) & 5*5 & 5*8 \\ 13*5 & 13*(-13) & 13*8 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.102}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 0 & -144 & 144 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \tag{7.103}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ -3*0 & -3*(-144) & -3*(144) \\ 144*0 & 144*(-3) & 144*3 \end{pmatrix} \tag{7.104}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.105}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.106)$$

$$x_2 = x_3 \Longrightarrow -13x_1 + 13x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 \quad (7.107)$$

tomando $x_1 = 1$ *temos o autovetor* $(1,1,1)$

Os cálculos reforçam um resultado anterior: existe uma multiplicidade de autovetores para cada autovalor, na verdade existe um espaço de autovetores, um autoespaço, *associado a cada autovalor. Em geral o que fazemos é encontrar vetores básicos para cada um dos* autoespaços, *uma base.*

---

3. (ex. 3, página 130)

Solução 47 *(a) Suponha que os autovetores* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *possam ser* l.d. *e consideremos a combinação linear trivial*

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 = 0$$

$$T(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = 0 \qquad T(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) =$$
$$= \alpha_1 T(\vec{u}_1) + \alpha_2 T(\vec{u}_2) =$$
$$= \alpha_1\lambda_2\vec{u}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{u}_2 = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{\vec{u}_1 = \beta\vec{u}_2\}$$

os vetores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *são colineares e consequentemente* $\lambda_1 = \lambda_2$ *contradizendo a hipótese inicial.*

A conclusão é então que, autovetores correspondentes a autovalores distintos são linearmente independentes

(b) Vamos agora considerar que os vetores

$$\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$$

são l.i. *e vamos considerar mais um autovetor,* $\vec{u}_{k+1}$ *associado ao autovalor* λ_{k+1} *diferente de todos os demais. Aplicando* T *a combinação linear nula*

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_k + \alpha_{k+1}\vec{u}_{k+1} = 0 \Longrightarrow \quad (7.108)$$

$$\Longrightarrow \alpha_{k+1}T(\vec{u}_{k+1}) = -T(\alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_k) \Longrightarrow \quad (7.109)$$

$$\vec{u}_{k+1} \in [\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k] \quad (7.110)$$

Mas a última linha contradiz o fato de que $\vec{u}_{k+1}$ *porque ele é* l.i. *com qualquer outro autovetor, então ou*

- $\lambda_{k+1} = 0$

- *o conjunto* $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}\}$ *é* l.i.

e como a primeira afirmação não interessa, vale a segunda.

---

4. (ex. 1, página 134)

   (a) **Solução 48**

$$L(sen(x)) = [(sen(x))']' = [cos(x)]' = -sen(x)$$
$$L(cos(x)) = [(cos(x))']' = [-sen(x)]' = -cos(x)$$
$$\forall\ ;\ \alpha sen(x) + \beta cos(x) = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

   Ambos os vetores estão associados ao autovalor -1.

   (b) **Solução 49** *Queremos uma função cuja segunda derivada seja ela mesma:*

$$L(y) = y'' = y$$
$$como\ y = e^{ax} \Longrightarrow y' = ae^{ax} = ay, y'' = a^2e^{ax}$$
$$então y = e^{ax}\ ;\ a = \pm 1\ \text{é solução.}$$

   As soluções encontradas, $y = e^{-x}, y = e^x$ *são dois vetores* l.i. *associados ao autovalor* $\underline{1}$.

   (c) **Solução 50**

$$y = e^{ix}$$
$$L(y) = i^2e^{ix} = -e^{ix}$$
$$y = e^{ix}\ \text{é um autovetor associado ao autovalor}\ -1$$

   (d) **Solução 51** *é a fórmula de Abel-Euler*

---

5. (ex. 7, página 131)

   (a) Encontre os `autovalores` e depois um par de `autovetores` $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ correspondendo aos `autovalores` encontrados, para matriz $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

   Solução 52 *Por definição procuramos* λ *tal que* $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ *e podemos observar que depois da igualdade temos:* $\lambda\mathcal{I}\vec{x}$. *Isto nos permite calcular:*

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\mathcal{I}\vec{x} \equiv (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\vec{x} = 0$$

e como o autovetor *é qualquer estamos procurando uma solução não trivial para esta equação homogênea o que nos leva a conclusão que o determinante do sistema tem que ser nulo:*

$$P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$$

$P(\lambda)$ é um polinômio de grau n em λ sendo $\mathcal{A}$ uma matriz n x n. Este polinômio recebe o nome de `polinômio caracterísitico`[11]. *No presente caso temos:*

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 2 \ ; \ \lambda = 3$$

Voltando a re-escrever a equação para cada um dos valores encontrados para λ podemos encontrar vetores próprios $\vec{v}_{\lambda=2}$ e $\vec{v}_{\lambda=3}$: No primeiro caso encontramos, se considerarmos $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $x_1 = 2x_2$. Quer dizer que qualquer vetor desta reta é um vetor próprio associado a $\lambda = 2$, <u>por exemplo</u> $\vec{v}_1 = (2,1)$. De forma análoga, com $\lambda = 3$ encontraremos que $x_1 = x_2$, logo $\vec{v}_2 = (1,1)$ é um exemplo. Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ são l.i. e formam assim uma base para $\mathbf{R}^2$. A matriz da transformação linear na nova base será $\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\vec{v}_1) \\ A(\vec{v}_2) \end{bmatrix}$ porque já vimos que matriz de uma transformação linear é formada pelos vetores-coluna obtidos ao se aplicar a transformação linear nos vetores da base, e aqui $\mathcal{A}\vec{v}_1 = 2\vec{v}_1$ $\mathcal{A}\vec{v}_2 = 3\vec{v}_2$.

Geometricamente isto significa que a transformação linear representada por $\mathcal{A}$ deforma o espaço com duas escalas diferentes, uma com valor $\lambda = 2$ na direção do vetor $\vec{v}_1 = (2,1)$ e com valor $\lambda = 3$ na direção do vetor $\vec{v}_2 = (1,1)$. O estudo dos valores próprios-vetores próprios nos leva a encontrar os sub-espaços ao longo dos quais as deformações são constantes. Neste caso a deformação se dá com coeficiente 2 *ao longo da reta $x_2 = 2x1$ e com coeficiente* 3 *ao longo da reta $x_2 = x_1$.*

Podemos ver os valores próprios *na diagonal da nova matriz. A teoria geral diz que quando encontrarmos* todos *os valores próprios próprios de uma* operador linear*, se eles forem todos diferentes, a matriz, numa base formada de vetores próprios será uma matriz diagonal com os valores próprios na diagonal.*

(b)

(c)

(d)

¡- forca uma parada do LaTeX

[11] a equação polinomial se chama *equação característica.*

7.10 Equivalência de matrizes e operacoes linha-soluções

1. (ex. 1, página 154)

Solução 53

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}L_1 + L_2 - - > L_2 \ ; \ \frac{1}{3}L_1 + L_2 - - > L_3$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}L_2 + L_3 - - > L_3 \quad \frac{3}{5}L_2 + L_4 - - > L_4$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9.6 & -7.2 \\ 0 & 0 & -7.2 & 8.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 44 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{7.2}{9.6}L_3 + L_4 - - > L_4$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9.6 & -7.2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 44 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.333 \\ 14.166666 \\ 15.83333 \\ 15 \end{pmatrix}$$

usando `scilab`*, para confirmar os resultados,*

```
 a  =

  !   18.  - 6.   - 6.     0.  !
  ! - 6.     12.    0.   - 6.  !
  ! - 6.     0.     12.  - 6.  !
  !   0.   - 6.   - 6.     12. !

   -->b
    b  =

     !   60. !
```

```
!   0.  !
!   20. !
!   0.  !

 -->a \ b
  ans  =

    !   13.333333 !
    !   14.166667 !
    !   15.833333 !
    !   15.       !
```

2.

3.