A integral de Riemann
T. Praciano-Pereira tarcisio@member.ams.org
Sobral Matemática 25 de outubro de 2009

Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Soma de Riemann

1.1 Integração geométrica.

Vou calcular, aproximadamente, várias integrais para tornar “mecânico” o uso da “soma de Riemann” como método de aproximação de integrais.

Neste livro a integral representa a área algébrica delimitada pelo gráfico de uma função f entre dois pontos dados de seu domínio, esta é a forma de se interpretar a integral no Cálculo. o símbolo

$$\int_a^b f$$

representa a área limitada pelo gráfico de f e o eixo OX desde $x = a$ até $x = b$. A figura (fig. 1) página 1, é uma interpretação geométrica desta idéia.

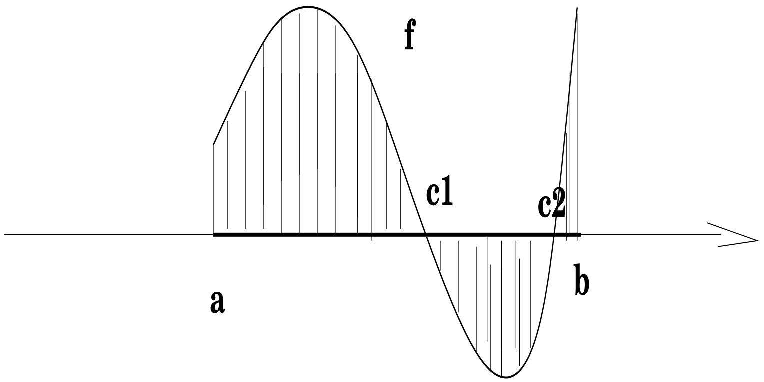

Figura 1: A integral de $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$

Deixe-me fazer uma análise da figura (fig. 1). Temos ali uma função que é positiva no subintervalo $[a, c1]$ e é negativa no sub-intervalo $[c1, c2]$.

Como a área representa uma “quantidade” de um fenômeno, é razoável pensarmos que as “sub-integrais”

$$\int_a^{c1} f \quad \int_{c1}^{c2} f \quad \int_{c2}^{b} f \tag{1}$$

tenham sinais diferentes.

Logo a seguir vou discutir meios aproximados para o cálculo da integral usando retângulos inscritos na região cuja integral desejo calcular. Posso usar este método para reforçar o significado do sinal da “área algébrica” que a integral representa. Imagine um retângulo inscrito na região cuja área está representada pelo símbolo

$$\int_a^{c1} f$$

relativamente à figura (fig. 1). A altura deste retângulo seria positiva enquanto que um retângulo inscrito na região associada ao símbolo

$$\int_{c1}^{c2} f$$

teria altura negativa o que nos conduz a concluir que as duas áreas

$$\int_a^{c1} f, \int_{c1}^{c2} f$$

devam ter sinais diferentes. Os exemplos iniciais em que usei a velocidade como fenômeno a ser medido pela integral, mostraram que tem sentido o sinal da área. Nós veremos que é assim, e que estamos estudando *área algébrica*.

A lista de exercícios deve ser entendida como um laboratório para repassar conhecimentos que o aluno já deve ter. Se você considerar que um exercício é trivial, simplesmente deve ignorá-lo e passar para o seguinte, apenas tendo o cuidado de ter a certeza de que não fez um julgamento apressado. Observe que não tem sentido refazer aquilo que você já sabe, mas tem sentido re-lembrar um conhecimento que se esmaeceu.

Exercícios 1 *Significado geométrico da integral*

1. *Represente geométricamente as seguintes integrais. Observe que o símbolo*

$$\int_a^b f$$

contem três informações:

- *o intervalo de referência da integral: um ponto inicial e um ponto final (duas informações) representando* dois limites de integração*;*
- *o gráfico de f que estabelece o resto dos limites de integração, terminando de delimitar a área álgebrica que desejamos calcular.*

a) $\int_{-3}^{3} 4$	*b)* $\int_{0}^{3} 4$	*c)* $\int_{-1}^{2} 4$
d) $\int_{3}^{-3} 4$	*e)* $\int_{3}^{0} 4$	*f)* $\int_{2}^{-1} 4$
g) $\int_{-3}^{3} 4x$	*h)* $\int_{0}^{4} 4x$	*i)* $\int_{4}^{0} 4x$
j) $\int_{-7/4}^{1/4} 4x+3$	*k)* $\int_{-7/4}^{-3/4} 4x-3$	*l)* $\int_{-3/4}^{1/4} 3-4x$
m) $\int_{-7}^{-1} x+4$	*n)* $\int_{1}^{7} x-4$	*o)* $\int_{1}^{7} 4-x$
p) $\int_{-4}^{2} x^2+2x+1$	*q)* $\int_{-2}^{2} 1-x^2$	*r)* $\int_{-3}^{3} x^2-4$

2. *Calcule as integrais e procure indentificar algumas fórmulas associadas aos cálculos geométricos que você fizer.*

a) $\int_{-3}^{0} 4x$	*b)* $\int_{0}^{4} 4x$	*c)* $\int_{-4}^{4} 4x$
d) $\int_{a}^{0} 4x$	*e)* $\int_{0}^{a} 4x$	*f)* $\int_{a}^{b} 4x$
g) $\int_{a}^{0} 4$	*h)* $\int_{0}^{a} 4$	*i)* $\int_{a}^{b} 4$
j) $\int_{a}^{0} -4$	*k)* $\int_{0}^{a} -4$	*l)* $\int_{a}^{b} -4$
m) $\int_{a}^{0} -4x$	*n)* $\int_{0}^{a} -4x$	*o)* $\int_{a}^{b} -4x$

3. *Calcule aproximadamente as integrais das parábolas. Sugestão: represente geométricamente as integrais e aproxime por falta ou por excesso as áreas com retângulos, triângulos ou trapésios, conforme for conveniente. Aumente a precisão dos resultados usando uma máquina de calcular ou um programa de computador.*

   a) $\int_{-4}^{2} x^2+2x+1$ *b)* $\int_{-2}^{2} 1-x^2$ *c)* $\int_{-3}^{3} 4-x^2$

1.2 Cálculo aproximado da integral

Nós ainda não sabemos calcular as integrais:

$$\int_{-3}^{3} x^2+2x+1 \; ; \; \int_{0}^{3} 1-x^2 \; ; \; \int_{-3}^{3} 4-x^2 \qquad (2)$$

mas já discuti a possibilidade de fazer este cálculo *aproximadamente* e agora vou examinar esta questão mais a fundo.

1.2.1 Área aproximada usando retângulos

As regiões representadas pelos símbolos

$$\int_{-3}^{3} x^2+2x+1 \; ; \; ; \int_{0}^{3} 1-x^2 \; ; \; \int_{-3}^{3} 4-x^2 \qquad (3)$$

são regiões limitadas por contornos não retilíneos. Neste momento tudo que podemos fazer é calcular estas áreas aproximadamente.

Uma saída, para obter uma aproximação de integrais como

$$\int_{-3}^{3} x^2+2x+1 \qquad (4)$$

representando a área de regiões com contornos curvilíneos, consiste em subdividir a região que elas representam com *retângulos*, *triângulos* ou *trapésios* e calcular a soma das áreas destas figuras.

Esta metodologia tem alguma vantagem se for aplicada no cálculo manual, mas se quisermos automatizar com uso de um programa de computador é fácil concluir que esta subdivisão artesanal não oferece grande vantagem. Veja o gráfico seguinte, na figura (fig. 2) página 5, para se convencer de que a área de um trapésio é uma média das áreas de dois retângulos:

Observe a figura (fig. 3) página 6, para que você compreender de que estou falando.

Você logo deve se convencer de que não há ganho especial em trabalhar com tantas figuras. Usando apenas retângulos podemos obter alta precisão, desde que a base dos retângulos sejam pequenas, e este objetivo poderá ser alcançado com um programa de computador, não com cálculos manuais.

Veja, por exemplo, a área de um trapésio é a média aritmética entre as áreas de dois retângulos, um com a altura máxima do trapésio, e o outro com a altura mínima do trapésio, supondo que o trapésio tenha duas alturas.

Isto mostra que o cálculo da área usando trapésio pode ser obtido com a média aritmética dos cálculos feitos usando, retângulos por excesso e retângulos por falta.

Depois, um triângulo é apenas um tipo particular de trapésio...

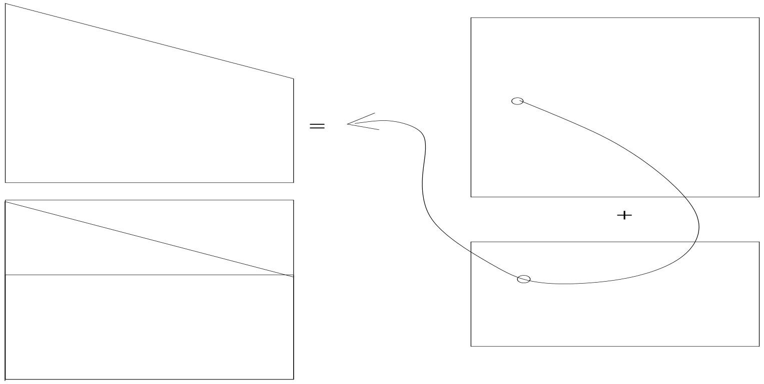

Figura 2: Trapésio é uma média de retângulos

Então vou me concentrar no cálculo com retângulos, para encontrar a área aproximada das integrais e me preocupar em obter este resultado com grande precisão diminuindo a base dos retângulos.

Se convença do que foi dito fazendo alguns gráficos.

1.2.2 Somas de Riemann

Para calcular aproximadamente $\int_a^b f$ podemos subdividir a região em triângulos, retângulos ou trapésios, *conforme a conveniência* ou de acordo com as possibilidades geométricas da figura. Mas já observei que não se ganha muito com este detalhe, muito mais se ganha na quantidade de subdivisões[1], e, naturalmente com o uso de um programa de computador.

Mas a principal razão pela qual estou usando retângulos é a de que podemos obter uma expressão algébrica simples para a soma das área dos retângulos e depois aplicá-la num programa de computador.

A expressão algébrica que se presta, facilmente, para utilizar num programa é uma *soma de Riemann.*

As somas de Riemann usam exclusivamente retângulos. Para obter os retângulos, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos, veja na figura (fig. 3) página 6, a sugestão gráfica de como fazer isto. As subdivisões não precisam ser regulares, como é o caso da (fig. 3), elas podem ser os nós de uma partição qualquer, arbitrária do intervalo. E para fazer demonstrações teremos que usar partições quaisquer.

Mas desde que possamos demonstrar que a integral existe, podemos passar a usar partições uniformes que satisfaçam a uma progressão aritmética de razao

[1]em outras palavras, ao usarmos subintervalos com medidas cada vez menores

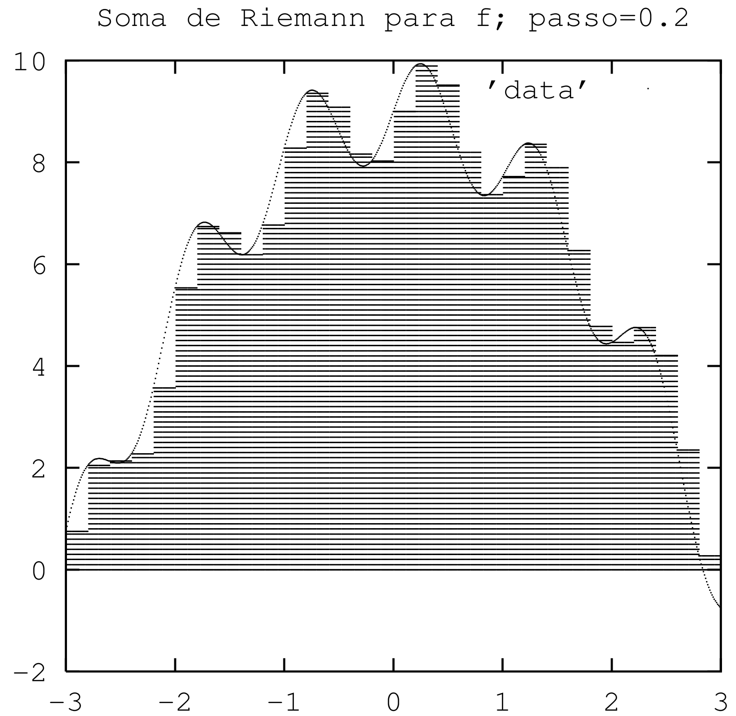

Figura 3: Soma de Riemann

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Este valor Δx é também o tamanho, (medida), da base de cada um dos subintervalos.

Exercícios 2 *Calculando algumas integrais aproximadamente*

1. *Represente geometricamente a região cuja área (algébrica) o símbolo* $\int_0^1 x^2$ *indica.*
2. *Considere uma partição uniforme do intervalo* $[0, 1]$ *usando* $\Delta x = 0.1$ *como razão da progressão aritmétic que gera esta partição. Use retângulos inscritos para calcular aproximadamente a área* $\int_0^1 x^2$.
3. *Represente com um somatório a área que você calculou na questão anterior. Escreva a progressão aritmética que descreve os nós da partição*

usada no cálculo aproximado da integral (use Δx para representar a razão da progressão aritmética).

4. *Analise o algoritmo seguinte e verifique que ele representa o cálculo do somatório que calcula aproximadamente a integral:*
   - $soma = 0$
   - $i = 0$
   - *enquanto* $(i < 10)$
     - *soma = soma + f(i*Δx);*
     - *i = i + 1;*
   - $soma = soma * \Delta x$
   - *imprima soma*

5. *Analise o seguinte programa para concluir que ele é uma implementação ao algoritmo apresentado anteriormente:*

```
• int main(void)
• {
  – float soma=0, x, inicio=0, fim=1, deltax=0.01;
  – x = inicio;
  – while (x < fim)
    * {
    * soma = soma + x*x;
    * x = x + deltax;
    * }
  – printf("Valor aproximado da integral %f",soma*deltax);
  – return(0);
• }
```

   Este é um programa na linguagem C que realiza o algoritmo anterior. Rode este programa num computador em que a linguagem C esteja instalada e você vai obter o valor aproximado

$$0.338350$$

   para a integral.

Comentário de alguns dos exercícios.

Se você fez experiências com o programa apresentado no exercício você deve ter encontrado alguns valores mais precisos para a integral.

Reduzindo o valor atribuido a `deltax` você pode conseguir valores mais aproximados para a integral

$$\int_0^1 x^2$$

e inclusive ter uma idéia do seu valor exato. Por exemplo, rodando o programa com $deltax = 0.000000002$ você encontrará o valor aproximado 0.3333333315 para a integral. O valor exato desta integral é $\frac{1}{3}$.

O somatório que você deve escrito a pedido de um dos exercícios é

$$\Delta x \sum_{k=0}^{9} (k * \Delta x)^2 = \sum_{k=0}^{9} (k * \Delta x)^2 \Delta x$$

e ele é um exemplo de *soma de Riemann*

Uma regra interessante na descoberta de informações é que devemos evitar cálculos diretos, em outras palavras, expressar os resultados em forma algébrica. Isto nem sempre é fácil e até mesmo exige uma certa prática para descobrir a forma algébrica adequada. Vou aplicar esta regra à soma de Riemann obtida acima. Nela aparece a expressão da função cuja integral estamos calculando, vamos eliminar as contas:

$$S_{10} = \sum_{k=0}^{9} f(k * \Delta x)\Delta x \tag{5}$$

$$f(x) = x^2 \tag{6}$$

e você certamente não vai se opor se eu escrever

$$S_{10} = \sum_{k=0}^{9} f(0 + k * \Delta x)\Delta x \tag{7}$$

Tenho que responder algumas perguntas sobre a sucessão de alterações feitas.

- Apareceu um misterioso S_{10} , ele representa a quantida de nós da partição, porque a precisão no cálculo depende desta quantidade. Teóricamente S_{1000} seria muito mais preciso e $S_{1000000}$ *muito mais preciso* ainda;
- $f(0 + k * \Delta x) = f(k * \Delta x)$ e por que o zero ? É que o intervalo de integração é $[0, 1]$ e o ponto inicial do intervalo aparece nas contas, como logo veremos. Aqui parece desnecessário!

Vou adotar este *caso particular* de partição, chamada de *partição uniforme*, neste capítulo. Em capítulo posterior irei discutir as implicações desta particularização que também se extende às *somas de Riemann*. Posteriormente eu vou apresentar estes conceitos todos na sua forma mais geral.

Vou querer calcular integrais associadas a intervalos diferentes do intervalo $[0, 1]$ que o caso discutido nos exercícios acima. Portanto, se eu quiser calcular

$$\int_a^b f$$

o intervalo é $[a, b]$ e se formos colocar ai uma partição gerada por uma *razão* Δx arbitrária, surgirão alguns problemas.

Os nós da partição (malha) são:

$$a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, a + 3\Delta x, \cdots a + k\Delta x, \cdots, a + (n-1)\Delta x... \quad (8)$$

e formam uma progressão aritmética de razão Δx.

Quero que o *último termo* da progressão aritmética seja o ponto $\underline{b}$, o segundo extremo do intervalo. A maneira de conseguir isto consiste em *calcular* Δx para que a progressão aritmética fique *compatível* com o intervalo:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

em que n é o número de nós. Agora a os nós da partição (malha) são:

$$a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, a + 3\Delta x, \cdots a + k\Delta x, \cdots, a + (n-1)\Delta x, b = n\Delta x \quad (9)$$

e formando uma progressão aritmética de razão Δx que cobre **exatamente** (e uniformemente) o intervalo $[a, b]$.

Faça algumas experiências para se certificar de que o dito acima, confere. Não pode ser um Δx arbitrário, tem que ser $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

- você escolhe o número $\underline{n}$ de nós, e
- calcula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

de formas que a progressão aritmética cubra o intervalo $[a, b]$.

1.2.3 Soma de Riemann

Me acompanhe na construção da soma de Riemann

- Faça o gráfico de uma função arbitrária, definida sobre um intervalo $[a, b]$ qualquer e acompanhe a discussão analisando o gráfico. Este é uma forma bastante genérica de construir, uma vez que você estará construindo o seu gráfico em vez de o autor produzir um gráfico para você. É como se você evitasse que eu interferisse em sua forma de pensar.
- Escolha um número inteiro positivo[2] para subdividir o intervalo, $\underline{n}$ e subdivida o intervalo $[a, b]$ neste número $\underline{n}$ de subintervalos iguais: uma partição uniforme do intervalo $[a, b]$;
- Marque os nós da partição no intervalo $[a, b]$;
- Associe a cada nó a altura de f sobre o nó: $f(a + k\Delta x)$ e desenhe o correspondente retângulo de altura

  $$f(a + k\Delta x)$$

[2]use um número pequeno para que o gráfico não fique muito confuso

e base

$$[a + k\Delta x \ , \ a + (k+1)\Delta x].$$

Observe que o primeiro nó é $\underline{a}$ e portanto o último retângulo terá como altura

$$f(a + (n-1)\Delta x) = f(b - \Delta x)$$

e a base dele será o subintervalo

$$[a + (n-1)\Delta x, a + n\Delta x] = [a + (n-1)\Delta x, b] = [b - \Delta x, b] \ .$$

- O somatório das áreas destes retângulos será:

  $$\Delta x \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x$$

  e você deve comparar com a outra soma de Riemann, feita acima, em que escrevi $f(0 + k\Delta x)$ justificando que o "zero"não parecia ser necessário, lá, e aqui eu não posso deixar de escrever $\underline{a}$.

Como a partição que impusemos no intervalo $[a, b]$ é uniforme (a distância entre os nós é a mesma) $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, a soma de Riemann recebe também o nome de *soma de Riemann uniforme*.

Estou fazendo mais uma simplificação no método. Falei anteriormente de *área por excesso* e *área por falta*. Mas quero calcular integrais automaticamente e assim não desejo analisar o gráfico para escolhar a área por excesso ou por falta. Seguirei, assim, o exemplo da figura (fig. 3) na qual você pode ver que alguns retângulos representam a área por *excesso* e outros por *falta*. Seria muito difícil expressar num programa de computador as somas produzindo *área por excesso* ou *área por falta*.

Sem dúvida estamos trabalhando com casos particulares e isto deve ter uma conseqüência. Registre isto para verificar se o autor resolve esta pendência posteriormente.

Exercício 1 *Cálculo aproximado da integral*

1. *Se você tiver acesso a um computador com a linguagem* `C` *instalada, rode o programa apresentado acima com diferentes valores para* Δx*, valores cada vez menores. Na ausência de programação, use uma máquina de calcular, com memória, para executar o algoritmo. A forma de usar o programa é a seguinte:*
   - *supondo que o programa se encontra no arquivo* `integral.c`*;*
   - *você compila o programa com*

     `gcc -Wall -oprog integralc`

     produzindo o arquivo executável `prog`*;*

- *você executa o programa com*

  `./prog`

2. *Altere o programa* `integral.c` *para calcular outras integrais.*

3. *Calcule aproximadamente a integral* $\int\limits_{-1}^{0} x^2$ *e se convença, graficamente, de que o resultado deve ser igual ao da integral* $\int\limits_{0}^{1} x^2$.

4. *Use a soma de Riemann com a seguinte alteração*

$$\Delta x \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x) = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x$$

   e veja que os resultados se assemelham (não podem ser iguais).

5. *Por que não poderia ser a soma de Riemann assim*

$$\Delta x \sum_{k=0}^{n} f(a + k\Delta x) = \sum_{k=0}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x \ ?$$

6. ** Porque a soma (não é de Riemann)*

$$\frac{\Delta x}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(a + k\Delta x) + f(a + (k+1)\Delta x)]$$

   corresponde a uma soma de trapésios, em vez de retângulos ? Aqui, com um pequeno esforço computacional (acréscimo de um n termos na soma) se obtém uma aproximação melhor.

7. *Retome o gráfico que você fez ainda há pouco, para acompanhar a explanação sobre* soma de Riemann*. Obtenha uma nova partição, (um refinamento) acrescentando o ponto médio de cada intervalo. Verifique que a aproximação é melhor.*

8. *Considere o gráfico na figura (fig. 4) página 12,*

   Verifique que alguns retângulos tem área nula, identifique quais.

9. *Considere o gráfico na figura (fig. 4) página 12. Verifique que alguns retângulos tem* área algébrica *negativa, identifique quais.*

10. *A partição na figura (fig. 4) página 12, corresponde a uma malha com* $\Delta x = 0.5$*. Escreva a correspondente soma de Riemann e calcule o seu valor (a equação da função aparece na parte superior do gráfico), é*

$$f(x) = (x^3 + 3x^2 - x + 5)sen(\pi x)$$

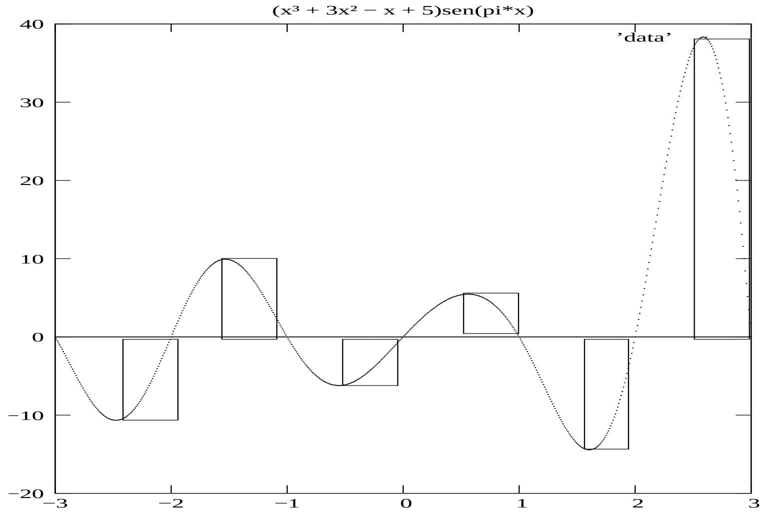

Figura 4:

11. <u>*Uma progressão aritmética mal calculada*</u>

    Escreva uma soma de Riemann para calcular $\int\limits_{-1}^{1} x^2$ *usando* $\Delta x = 0.3$*. Registre o problema, se houver alguma.*

Se você não tiver concordado com a veracidade das afirmações contidas nos exercícios acima, de que há área nulas e negativas, terá sido porque você não observou que há alguns retângulos com altura nula ou negativa. Volte a análisar os exercícios munido desta nova informação.

1.2.4 Expressão formal da soma de Riemann

Vou agora passar a expressão formal da soma de Riemann.

Considere a figura (fig. 3) página 6. Estipulamos um tamanho Δx para a base dos retângulos e cobrimos a área algumas vezes por excesso, outras vezes por falta. Para isto consideramos a progressão aritmética

$$a + k\Delta x; k = 0, 1, ... \tag{10}$$

e o último retângulo pode extrapolar o intervalo de integração $[a, b]$. Foi o que você viu no exercício 11, página 12.

Δx é função do intervalo $[a, b]$ e do número de nós da *partição uniforme* considerada sobre este intervalo, /bin/sh: line 1: aspell: command not found

/bin/sh: line 1: aspell: command not found um número inteiro escolhido por você, ou seja é dado pela fórmula:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

A progressão aritmética obtida com esta razão Δx vai fazer de

$$b = a + n\Delta x,$$

o último termo da p.a. de modo que o último retângulo escolhido corresponde ao subintervalo

$$[a+(n-1)\Delta x, a+n\Delta x] = [b-\Delta x, b] \tag{11}$$

Existe uma notação prática que esconde a expressão dos termos da progressão aritmética, mas que sabemos qual é, de forma implícita. Usamos

$$x_0 = a = a + 0\Delta x; \tag{12}$$
$$x_k = a + k\Delta x; \tag{13}$$
$$x_n = b = a + n\Delta x; \tag{14}$$

Agora podemos escrever a expressão da soma dos retângulos:

$$\int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x \tag{15}$$

a segunda formulação é apropriada para programas de computação, a primeira é mais resumida e própria para escrever em textos de Matemática.

Observe que o último "nó" em que foi calculada a altura de f não é b, mas '$b-\Delta x$" na soma de Riemann

$$\int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x \tag{16}$$

e se usarmos

$$\int_a^b f \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x \tag{17}$$

então a primeira altura usada será $f(a+\Delta x)$ e a última altura utilizada será $f(b)$. Os dois métodos são equivalentes, no sentido de que oferem aproximação idêntica. Eu vou usar exclusivamente a expressão

$$\int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x \tag{18}$$

para as somas de Riemann.

Para cada um dos subintervalos, consideraremos a altura

$$f(a+k\Delta x) = f(x_k)$$

em que k varia desde 0 até $n-1$:

$$f(a), f(a+\Delta x), f(a+2\Delta x), \cdots f(a+k\Delta x), \cdots, f(a+(n-1)\Delta x). \tag{19}$$

Quer dizer que os retângulos tem por área:

$$f(a)\Delta x, f(a+\Delta x)\Delta x, f(a+2\Delta x)\Delta x, \cdots f(a+(n-1)\Delta x)\Delta x \tag{20}$$

A soma destas áreas é o valor aproximado da integral, agora não sabemos se é por falta ou por execesso, mas, com certeza é um valor médio, entre o cálculo por excesso e o cálculo por falta.

Se você recebeu um CD com programas que acompanham este livro, você encontra o programa `riemann.py` no CD.

Experimente as funções

`riemann(), riemann_grafun()`

no arquivo

`riemann.py`.

Digite `python riemann.py` depois de editar o arquivo. Vejas as últimas linhas do arquivo `riemann.py` que trazem instruções de como usar o programa. Não se preocupe em entender o programa, agora. Volte a ler o programa em outras ocasiões, ao longo do capítulo.

Definição 1 *Soma de Riemann Considere o intervalo* $[a, b]$ *e uma função* f *definida neste intervalo. Definimos uma soma de Riemann, de ordem* n*, associada a uma partição uniforme*[3]

$$x_0 = a, \ldots, x_k = a + k\Delta x, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, b = a + n\Delta x$$

como

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x. \tag{21}$$

Observe que em todos os retângulos eu considero a altura dada pelo primeiro extremo do correspondente subintervalo. Eu poderia ter usado o segundo extremo obtendo a fórmula

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x. \tag{22}$$

que você deve se convencer que representa uma aproximação equivalente da integral. Eu vou usar apenas a primeira formulação para somas de Riemann.

[3] Já disse que as partições não precisam ser uniforme, estou fazendo uma escolha.

Observação 1 *Que é a integral ?*

Ainda não defini o que é a integral*, apenas falei que as somas de Riemann representam* uma aproximação da integral.

Esta questão é equivalente à definição de um número irracional: um número irracional é um limite *de uma sucessão de números racionais.*

Aqui as somas de Riemann fazem o papel do número racional e a integral é uma espécie de limite de somas de Riemann.

*Um dos objetivos deste livro é deixar claro que "*espécie de limite de somas de Riemann*" é este de que estamos falando. Inclusive a linguagem que acabei de usar sugere que se trata de uma forma não usual de calcular limite, e isto é verdade.*

Um outro objetivo deste livro é conduzí-lo a calcular integrais e saber decidir quando uma função tem integral, caso em que dizemos, então, que a função é integrável.

Exercícios 3 *Soma de Riemann superior*[4] *ou inferior*

1. *Prove que, se f for uma função crescente,*

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x. \tag{23}$$

é uma aproximação por falta da integral $\int_a^b f$ *e*

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x. \tag{24}$$

é uma aproximação por excesso da integral. Faça um gráfico ilustrativo.

Definição 2 *Soma superior ou inferior de Riemann*

As somas de Riemann superiores produzem aproximação por excesso, e elas são obtidas quando em cada subintervalo escolhemos supremo da função como altura do correspondente retângulo.

As somas de Riemann inferiores produzem aproximação por falta, e elas são obtidas quando em cada subintervalo escolhemos ínfimo da função como altura do correspondente retângulo.

2. ** Não é verdade que uma aproximação por falta seja uma soma de Riemann inferior e nem que uma aproximação por excesso seja uma soma de Riemann superior.*

[4] é preciso saber o que são somas superiores ou inferiores, apesar de que eu tenha declarado que não usaria tal questão nos programas

3. *Prove que, se f for uma função decrescente,*

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x. \tag{25}$$

é uma aproximação por excesso da integral $\int_a^b f$ *e*

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x. \tag{26}$$

é uma aproximação por falta da integral. Faça um gráfico ilustrativo.

Na proxima seção alguns cálculos feitos com um programa em Python vão ilustrar numericamente e graficamente o significado da soma de Riemann.