Cálculo Variacional

Praciano-Pereira, T.[1]

Sobral Matemática
9 de abril de 2009

[1]tarcisio@member.ams.org

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Este livro é uma introdução ao Cálculo Variacional seguindo, muito de perto, como roteiro, o livro com o mesmo nome de I.M. Gelfand e V.S. Fomin a partir da tradução feita por Richard Silverman.

Não é exatamente uma traduação, mas o leitor da obra citada pode encontrar aqui tudo o que se encontra naquele livro fundamental. Eu completei muitas das afirmações que os mestres Gelfand e Fomin deixaram sem provar por consideraram-nas simples exercícios. O leitor também podem encontrar os meus erros ao interpretar as idéias dos mestres e tentar deixá-las mais precisas em alguns pontos.

Eu não tenho dúvidas de que muitos gostariam de ter feito o que eu estou fazendo e assim me expondo à crítica por ter ousado fazê-lo, que seja bem vinda a crítica se pudermos juntos melhorar este livro e ter assim em nossa lingua uma fonte de grande valor nos primeiros passos para entender a teoria do *Cálculo nos espaços de funções.*

Capítulo 1

Os primeiros exemplos

Neste capítulo inicial vem a discussão sobre o que são funcionais e alguns exemplos.

1.1 Alguns problemas variacionais simples

Um tipo de variável chamadas *funcionais* tem uma utilidade importante em diversos problemas da análise matemática, mecânica, geometria. A palavra *funcional* foi criada porque vamos tratar de uma *lei*, ou equação, em que a variável livre é uma função e assim evitar a forma pelo menos desagradável de escrever algo do tipo "o valor da função Φ sobre a função f é ..." quando desejarmos escrever $\Phi(f)$. O exemplo mais simples é uma integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \tag{1.1}$$

quando estivermos pensando em calcular I sobre uma família de funções integráveis como será frequentemente aqui o objetivo. Alguns outros exemplos podem ser (usando uma linguagem algumas vezes um pouco vaga)

1. <u>O funcional "comprimento de arco"</u> Considere a família de todas as curvas rectificáveis[1] no plano. Esta integral pode ser encontrada no diversos livros sobre o título "comprimento de arco" e assim podemos associar a cada curva retificável um único numero que é o valor do funcional *comprimento de arco*.

[1] No Cálculo, o comprimento de uma curva é o limite do comprimento das poligonais que envolvem ou são envolvidas pela curva com vértices sobre a curva. Se este conjunto de números tiver um único ponto de acumulação diremos que a curva é retificável e este ponto de acumulação é o comprimento da curva.

2. A ordenada do *centro de massa* Associado a uma "curva" feita de algum material, podemos calcular-lhe o centro de massa. Se a cada curva associarmos a ordenada do seu centro de massa, temos aqui um outro exemplo de funcional.

3. O caminho mínimo Considere todos caminhos possíveis ligando dois pontos A, B do plano, todos parametrizados no intervalo $[0,1]$. Seja

$$\vec{v}(t)\ ;\ t \in [0.1] \tag{1.2}$$

o vetor velocidade de uma partícula num destes caminhos no ponto $t \in [0,1]$. Poderiamos associar a cada caminho o numero *velocidade média* da partícula percorrendo este caminho.

4. Associando a uma equação diferencial Como o nosso objetivo aqui é entender e modelar usando equações diferenciais, vamos considerar o conjunto de todas as funções $y = f(x)$ duas continuamente diferenciáveis definidas no intervalo $[a,b]$. Então a fórmula

$$J(y) = \int_a^b y'^2(x)dx \tag{1.3}$$

define um funcional sobre o conjunto de todas estas funções. Observe que nada impede que este funcional tenha valores arbitrariamente grandes sobre esta família. Poderiamos considerar um conjunto mais restrito, das funções cujos gráficos fossem retificáveis, por exemplo.

5. Um exemplo mais genérico Considere a função $F(x,y,z)$ uma função contínua destas variáveis. Então a expressão

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \tag{1.4}$$

define um funcional sobre o conjunto de todas as funções diferenciáveis definidas em $[a,b]$. Com esta formulação abstrata podemos dar alguns exemplos:

   (a) Se $F(x,y,z) = z^2$ vemos novamente o o exemplo 4 aqui apresentado. E se nos interessamos pela desigualdade

   $$|F(x,y,y')| < \infty \tag{1.5}$$

   ela provavelmente se realiza sobre um subconjunto das funções cujo gráfico seja retificável.

   (b) Se $F(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}$ então temos o funcional "comprimento de arco".

Este assunto é bem antigo e pode ser encontrado nos trabalhos de Euler (1707-1783) ou de um dos Bernouill (braquistócrona). Mas uma formulação do Cálculo Variacional ainda não se encontra feita de forma semelhante a bem estabelecida fórmulação do Cálculo Diferencial e Integral sobre a funções. Em geral todos os trabalhos giram em torno da maximização de algum exemplo particular de funcional como sugeri em alguns dos exemplos acima.

Mas me interessa ir um pouco mais longe alcançando o que poderia ser chamado de "Cálculo sobre funções", numa comparação com o Cálculo Diferencial e Integral que seria um "Cálculo sobre variáveis reais ou complexas", indicando assim qual é a variável do Cálculo que estamos desenvolvendo.

Acho que podemos distinguir os dois níveis de desenvolvimento com a terminologia *Cálculo variacional* e *problemas variacionais*, no segundo caso estarei preocupado apenas em determinar extremos de funcionais enquanto que no primeiro caso me vai interessar o desenvolvimento das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral para serem aplicadas às funções como variáveis. Não é atoa que este caminho está ainda longe de ficar bem definido, uma dos métodos do *Calculo Variacional* é *a derivada nos sentido das distribuições.*

Vou passar a alguns exemplos de *problemas variacionais* quer dizer à busca de *extremos de funcionais.*

1. A menor curva (comprimento mínimo) ligando dois pontos A, B do plano é uma reta.

   A solução é o segmento de reta ligando os pontos A, B.

   $\boxed{\textbf{Dem}}$:

   Vou fazer algumas reduções do problema que embora sejam particularidades, não tiram a generalidade do resultado.

   Primeiro vou supor que o ponto B se encontra "acima do ponto " A ou ainda que o coeficiente angular da reta que liga os pontos A, B seja positivo, isto não traz nenhuma particularização importante para o problema, mas torna as contas mais simples.

   Segundo, vou considerar o gráfico de uma função f que também liga os pontos A, B, $f(x_0) = y_0; f(x_1) = y_1$ com uma certa particularidade, convexa, quer dizer que a derivada é descrescente, e a segunda derivada é negativa. O gráfico na figura (1.1) página 6, ilustra a idéia.

   Posso colocar estas hipóteses nos seguintes termos

   $$A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1), x_0 < x_1, y_0 < y_1; \tag{1.6}$$
   $$y = f(x) \ ; \ x \in [x_0, x_1] \tag{1.7}$$
   $$x < y \implies f'(x) < f'(y); f''(x) \le 0; \tag{1.8}$$
   $$J(f) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f(x)'^2}dx \tag{1.9}$$

   e quero encontrar o mínimo de J sobre todos os possíveis gráficos de funções diferenciáveis $y = f(x)$ definidas no intervalo $[x_0, x_1]$.

   Vou provar que este funcional tem derivada zero exatamente em cima de uma curva cujo gráfico é uma reta, o segmento $\overline{AB}$.

   A fundamentação geométrica da demonstração vem de que todas as funções cujos gráficos liguem os dois pontos, serão as côncavas ou as convexas que estarão entre as que minimizam o funcional J e ainda assim o valor de J sobre estes gráficos é maior

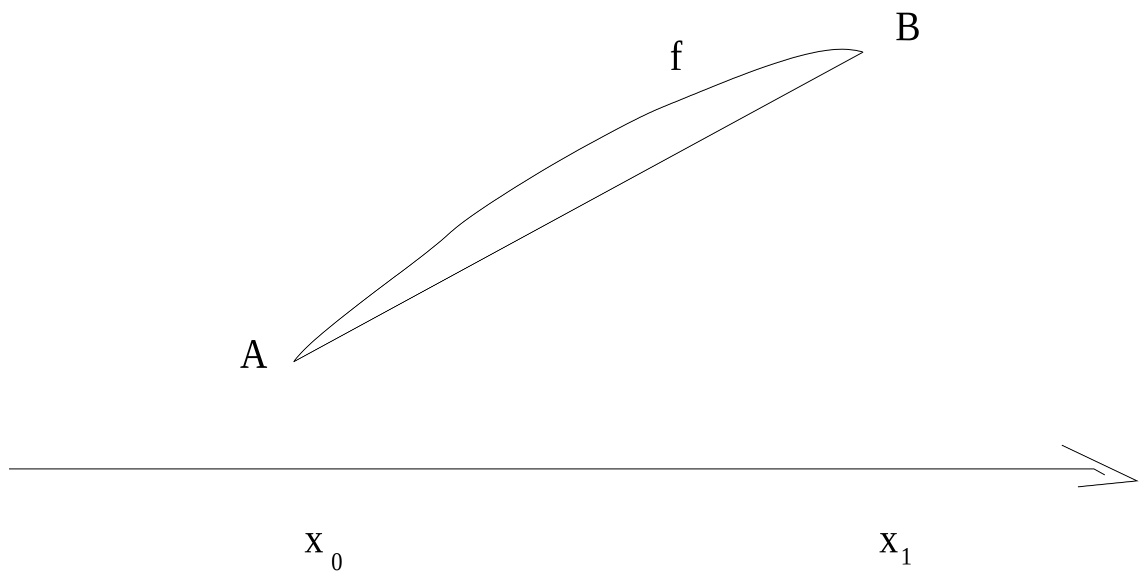

Figura 1.1: função convexa

ou igual ao valor de J sobre a função do primeiro grau que liga estes pontos, porque "qualquer envolvente tem maior comprimento do que uma envolvida, no caso, o segmento de reta.

Feitas estas restrições sobre os possíveis caminhos entre os pontos A, B posso fazer os seguintes cálculos:

$$J(f) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \tag{1.10}$$

$$\frac{df'(x)^2}{df} = \frac{df'(x)^2}{dx}\frac{dx}{df} = 2f'(x)f''(x)\frac{1}{f'(x)} = 2f''(x) \tag{1.11}$$

$$J'(f) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} dx = 0 \tag{1.12}$$

Como a função (o produto de funções) no integrando é negativa por hipótese, equação (12) porque f é convexa então então $f''(x) \leq 0$. A única possibilidade de que esta integral seja zero[2] é se o integrando for identicamente zero, quer dizer $f''(x) = 0$ e consequentemente $graf(f)$ é uma reta, como queriamos demonstrar.

Mostrei que de dentre todas as funções convexas (e seria equivalente no caso das côncavas) as retas são as que otimizam (extremo) o funcional.

Eu teria ainda que provar que elas minimizam o funcional, aqui fica uma defeito desta demonstração para ser corrigido depois.

q.e.d .

2. A braquistócrona é a curva pela qual desliza um corpo em tempo mínimo entre dois pontos A, B dados. O problema foi atacado por vários matemáticos desde o século 15 e foi resolvido por John Bernoulli, James

[2]É uma integral no sentido de Riemann porque toda função convexa tem por segunda derivada uma função contínua.

Bernoulli, Newton e L'Hôpital sendo considerado o primeiro problema varicional pela forma como foi resolvido por John Bernoulli. $\boxed{\textbf{Dem}}$:

Não muda na essênca do problema se eu considerar que a origem é o ponto B e que ele está mais acima do ponto A, mas simplificam-se as contas. A curva é o gráfico de uma função, seja $y = f(x)$ esta função. A figura (1.2) página 7, representa estas

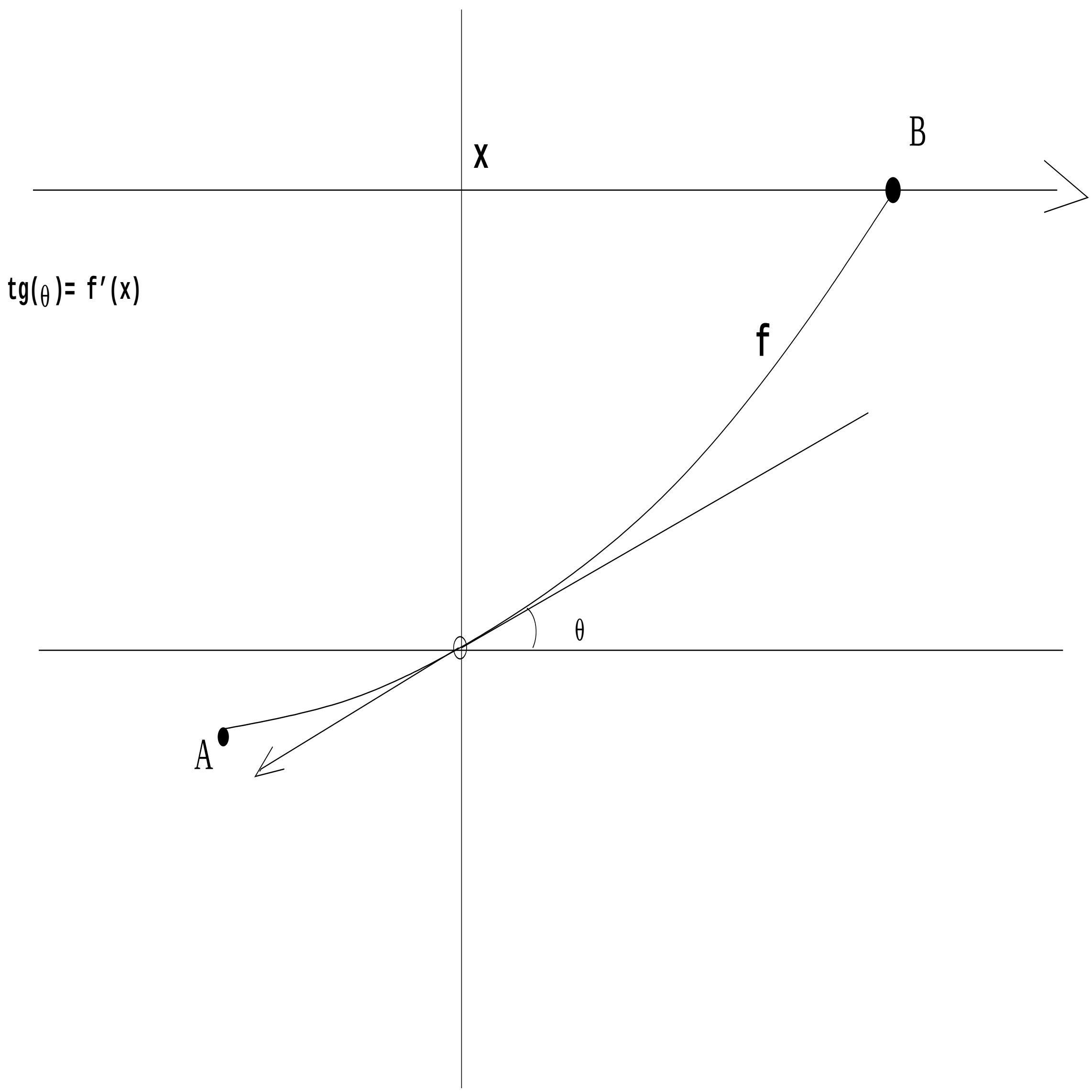

Figura 1.2: A braquistócrona

hipóteses, geometricamente. A tangente trigonométrica do ângulo da reta tangente no ponto $(x, f(x))$, sendo o coeficiente angular da reta tangente, é a derivada. A integral

$\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+f'(x)^2}dx$ é o comprimento de arco entre dois pontos dados logo posso calcular

$$tan(\theta) = f'(x)\ ;\ S = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+f'(x)^2} \tag{1.13}$$

$$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}dx \quad \Rightarrow \quad \tfrac{ds}{dt} = \sqrt{1+f'(x)^2}\tfrac{dx}{dt} = v(t) \tag{1.14}$$

$$v(t) = f'(x) = \sqrt{2gf(x)} \tag{1.15}$$

$$v(t)dt = ds = \sqrt{1+f'(x)^2}dx \tag{1.16}$$

$$dt = \tfrac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{v}dx = \tfrac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{2gf(x)}}dx \tag{1.17}$$

$$\tfrac{dx}{dt} = \tfrac{\sqrt{2gf(x)}}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \tag{1.18}$$

$$T = \int\limits_{x_0}^{x_1} \tfrac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{v}dx \tag{1.19}$$

Na equação (14) estou estabelecendo que a velocidade é o comprimento de arco vezes a

Ver a página 25 de Gelfand/Fomin

q.e.d .

3. Isoperimétrica Das curvas fechadas a que determina uma maior área é o círculo. **Dem**:

Seja γ uma curva fechada, Π o seu interior, e $P(x,y) = \frac{-y}{2}; Q(x,y) = \frac{x}{2}$ então

$$Area(\gamma) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int\int_{\Pi} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int\int_{\Pi} dxdy \tag{1.20}$$

See later the solution.... vou retornar a estas contas posteriormente para não parar agora.

q.e.d .

Observação 1 *A forma geral de um operador*

- *A propriedade localizadora Os problemas descritos acima envolvem funcionais que podem ser escritos na forma*

$$\int\limits_a^b F(x,y,y')dx \tag{1.21}$$

Este tipo de funcional tem a "propriedade localizadora" *que pode ser descrita da seguinte forma:* "se dividirmos a curva $graf(f); y = f(x)$ de acordo com uma partição do intervalo $[a,b]$, o valor do funcional será a soma dos valores em cada uma das partições." *É o tipo de funcional que usualmente aparece no* Cálculo de Variações.

O leitor observe que esta propriedade é crucial para considerarmos uma partição do intervalo $[a,b]$ e calcular o valor do funcional como uma soma dos seus valores em cada sub-intervalo abrindo as condições para uma discretização do problema, por exemplo substituindo os gráficos de funções por segmentos de reta.

- *Um funcional que não tem esta propriedade* *Um exemplo de funcional que não tem a "propriedade localizadora" é*

$$\frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx} \tag{1.22}$$

que determina o centro de massa de $graf(f)$; $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$

- *Uma forma geral do centro de massa* *Se* f *for uma função positiva,*

$$\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \tag{1.23}$$

calcula o centro de massa do $graf(f)$. *Ver* `centro_massa.c`.

Diversos problemas da Mecânica e da Física se encontram à raíz do desenvolvimento do *Cálculo de Variações*, como a curva de tempo mínimo, a *braquistócrona* ou o problema da isoperimétrica apresentados acima. Por outro lado, os métodos do *Cálculo de Variações* são amplamente aplicáveis a diversos problemas físicos, mas é preciso observar que as aplicações do *Cálculo de Variações* não se restringem a resolver questões específicas, pelo contrário, ele descreve leis gerais de vários ramos da Física que vão da Mecânica Clássica à teoria das partículas elementares.

Para entender a metodologia do *Cálculo de Variações* é fundamental acompanhar como eles se relacionam com os problemas da Análise Clássica, o estudo das funções multivariadas. Considere um funcional como

$$J(f) = \int_a^b F(x, f(x), f'(x))dx \ ; \ A = f(a), \ B = f(b) \tag{1.24}$$

em que as condições de fronteira A, B são variáveis determinando as diversas curvas $graf(f)$. Uma das formas de atacar este problema consiste em considerar uma partição uniforme do intervalo $[a, b]$

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b \tag{1.25}$$

dividindo o intervalo original em n sub-intervalos iguais. Neste ponto substituimos a curva $graf(f)$ por poligonais cujos vértices se encontram sobre $graf(f)$

$$(x_0, A), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)) = (x_n, B) \tag{1.26}$$

e aproximamos o funcional por uma soma de Riemann

$$\tilde{J}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} F(x_i, f(x_i), \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x})\Delta x \tag{1.27}$$

Cada poligonal fica determinada pelas ordenadas

$$f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

uma seleção arbitrária de valores condicionados à condição de fronteira

$$(a, A), (b, B)$$

e desta forma a soma, na equação (27), é uma função de n variáveis e uma aproximação do funcional fica representada por uma maximização desta função. Eule fez uso intenso deste *método de diferenças finitas* ao resolver problemas variacionais, ele substituiu assim o problema de maximização de funcionais por um problema de maximazação de funções de n variáveis chegando à solução por passagem ao limite. Quer dizer que os funcionais podem ser vistos como funções de um número indefinido de variáveis. O Cálculo Variacional pode ser entendido como a forma análoga do Cálculo Diferencial.

1.2 Espaços de funções

No estudo das funções de n variáveis é conveniente usar-se uma linguagem geométrica considerando-se um conjunto de n números

$$f(x_1), \ldots, f(x_n) = y_1, \ldots, y_n$$

como um ponto de um espaço de dimensão n, da mesma forma uma linguagem geométrica é útil no estudo dos funcionais. Assim vamos considerar cada função

$$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbf{R} \tag{1.28}$$

como um ponto numa *classe* que chamaremos de *espaço de funções*.

No Cálculo a n variáveis é suficiente considerar um único espaço pela equivalência topológica dos espaços de dimensão finita, [3, Teorema 14 e o seu corolário pp 48-49], este espaço será aqui denotado como $\mathbf{R}^n$, o representante canônico dos espaços vetoriais reais com sua norma euclidiana. No caso dos espaços de funções não há mais um *elemento universal* e somos conduzidos à seleção de um determinado espaço pela natureza do problema que tivermos considerando. Por exemplo, no caso de um funcional do tipo

$$\int_a^b F(x, y, y')dx \tag{1.29}$$

será interessante considerar a classe das funções $\mathcal{C}^1$ ao passo que no caso de um funcional do tipo

$$\int_a^b F(x, y, y', y'')dx \tag{1.30}$$

será interessante trabalhar com a classe[3] $\mathcal{C}^2$. No estudo de funcionais somos conduzidos a usar diversos espaços de funções.

O conceito de *continuidade* tem um significado importante para os funcionais de forma muito semelhante ao que ocorre com as funções na *análise clássica*. Mas para formular o conceito de continuidade para funcionais precisamos de discutir o que significa "proximidade" nos espaços de funções e uma forma de fazê-lo consiste em definir *norma* de uma função, o conceito análogo ao de distância de um ponto do $\mathbf{R}^n$ à origem. Vou precisar da estrutura de *espaço vetorial normado*, *EVN*, e uma boa apresentação pode ser encontrada em [**?**, capítulos 8,9] cuja notação[4] vou adotar neste livro. De imediato vou precisar da definição de norma que se encontra em [**?**, pag 212].

Definida a norma do espaço vetorial podemos torná-lo um espaço métrico com a definição

Definição 1 (distância) *Distância entre pontos num EVN Se f, g forem dois pontos de um* espaço vetorial normado*, então*

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

define a distância entre estes dois pontos.

Com a definição de distância posso recuperar toda a linguagem geométrica do Cálculo para os espaços de funções e vou passar a alguns exemplos que serão importantes para a discussão posterior.

1. O espaço $\mathcal{C}[a, b]$ das funções contínuas definidas num intervalo fechado $[a, b]$. Observar aqui que a escolha de um intervalo fechado é essencial, uma vez que

   $$\mathcal{C}[a, b] \subsetneq \mathcal{C}(a, b) \approx \mathcal{C}(\mathbf{R})$$

   essas relações são um exercício relativamente simples de teoria dos conjuntos usando o conceito de continuidade de funções reais. Para o meu objetivo aqui interessa o espaço das funções contínuas definidas num intervalo fechado uma vez que vou usar $f(a), f(b)$ como condições de fronteira dos problemas.

   Em $\mathcal{C}[a, b]$ definimos

   Definição 2 (Norma) *Norma em $\mathcal{C}[a, b]$*

   $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

   que é dado por $|f(x_0)|; x_0 \in [a, b]$ porque o supremo de funções contínuas se realiza em algum ponto do intervalo fechado (consequência do Teorema do Valor Médio para funções contínuas).

   A figura (1.3) página 12, é o gráfico de uma vizinhança tubular de uma

[3] Aqui a palavra *classe* representa uma variedade de espaços, ver por exemplo, [2].

[4] Isto não quer dizer que estou considerando o livro citado como pre-requesito para este, os capítulos anteriores ao 8 contém muito mais topologia do que provavelmente vou necessitar aqui.

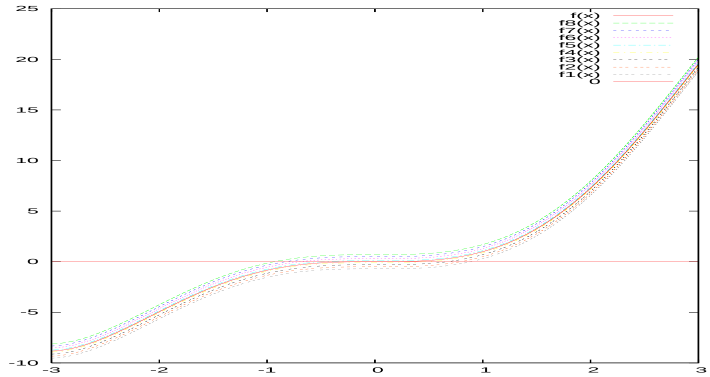

Figura 1.3: Vizinhança tubular em $\mathcal{C}[-3,3]$

função definida num interlo compacto (fechado) da reta e que se anula fora deste intervalo.

Uma bola de raio ϵ deste espaço é uma vizinhança tubular centrada num elemento do espaço, é o que podemos ver na figura (1.3). Qualquer função cujo gráfico fique numa variação máxima de 0.7, contínua[5] ou não, seria um elemento desta vizinhança tubular. Na figura podemos ver alguns elementos da vizinhança tubular de raio 0.7 da função

$$\begin{cases} x \in [-3,3] & f(x) = x^3 sin((x+4)/3) \\ x \notin [-3,3] & f(x) = 0 \end{cases}$$

no intervalo $[-3,3]$

2.

[5]Se a função f não for contínua, seu gráfico pode estar na vizinhança tubular, mas $f \notin \mathcal{C}[-3,3]$

Referências Bibliográficas

[1] I. M. Gelfand e S. V. Fomin
Calculos of variation
tradução de R.A. Silveman, Prentice-Hall, Inc.
Dover - 2000 - 1963

[2] Jaak Peetre *Besov Spaces*
Duke University Mathematics Series I - 1976

[3] G.E.Shilov *An introduction to theory of linear spaces*
tradução de R.A. Silveman, Prentice-Hall, Inc. Egnelwood Cliffs, N. J. (1961)

[4] Simmons, G.F.
Introduction to Topology and Modern Analysis.
McGraw-Hill - Book Company - 1968